BİYOMETRİ

I. BÖLÜM

GİRİŞ

Biyometri/Biyoistatistik : İstatistik metodların, biyolojik problemlerin çözümlenmesi için kullanılmasıdır. Biyoistatistik aynı zamanda **biyolojik istatistik** veya **biyometri** olarak da isimlendirilir.

İstatistik çok geniş ve aktif bir çalışma alanıdır. Sosyal ve Fen alanında birçok uygulama konusuna her gün yenileri katılmaktadır.

İstatistik ; Tabi olaylara dayanan sayısal verilerin bilimsel çalışmasıdır. Bu tanımdan yola çıkarak, üç ayrı kavram altında biyoistatistiğe temel oluşturan öğeleri tanımaya çalışalım.

1. Bilimsel Çalışma : Toplumu tanıma, profilini çıkarma, neden, niçin, nasıl ve ne zaman, nerede gibi sorulara cevap veren uğraşlar ve bilgi üretme işlevidir.

Öğeleri ;

1) Bilim alanına giren her türlü bilgi birikimini okumak, anlamak, gelişimlerini izlemek **(Tarama)**.

2) Doğru toplumu, doğru bilimi, doğru özelliği, doğru ve etkin yöntemlerle planlı biçimde gözlemek ve izlemek **(Gözlem)**.

3) Evrensel yaklaşımla birimlerin özelliklerini uygun ölçekler kullanılarak sayısallaştırmak ve elde edilen verileri kayıt etmek **(Ölçme)**.

4) Toplumda birimlerin benzer (ortak) ve farklı olan özelliklerini evrensel yaklaşımlarla ortaya koymak **(Analiz)**.

5) Tutarlı, geçerli ve etkin kararlar vermek **(Rapor Etmek)**.

2. İstatistiksel Olay : Canlı ve cansız varlıklar ile kuramsal olarak varsayılan birimlerde ortaya çıkan ve sayılarla ifade edilebilen oluşumlara **istatistiksel olay** denir.

Toplum (Populasyon, Evren, Yığın, Univers) : Belirli bir özelliği gösterdiği bilinen canlı ve cansız birimlerin oluşturduğu topluluğa denir. Özellikleri üzerinde araştırma yapılacak topluma **hedef toplum** (target population) denir.

Örneklem : Toplumun bütün bireylerini pratik ve ekonomik açıdan toplamak mümkün değildir. Bu yüzden evreni temsil edecek nitelikteki örneklerin seçilmesiyle bir alt grup oluşturulur ki buna **örneklem** denir.

Birim : Toplumun en küçük parçasına ya da toplumun araştırmaya konu olan ve değişkeni incelenen en küçük parçasına **birim** (statistical unit, case) denir.

Birim – Örneklem – Populasyon İlişkisi ;

Biyoistatistikte veriler genellikle bireysel gözlemleri esas alır. Bunlar en küçük örnekleme birimine ait ölçümler ya da gözlemler olabilir. En küçük birim, şart olmamakla birlikte çoğunlukla (biyolojik manada) bireydir. 100 farenin ağırlıklarını ölçtüğümüzde, tek bir farenin ağırlığı bireysel bir gözlemdir. 100 farenin toplu olarak tartılması ise belli bir işleme göre seçilen, bireysel gözlemlerin bir toplamı olarak ifade edilir. Bu örnekte bahsedilen bireysel gözlem, tek bir birey üzerine yani, tek bir fare üzerine kurulmuştur. Buna karşılık tek bir fareyi uzun süre incelediğimizi düşünelim. Bireysel gözlemler topluluğu, tek bir fareden farklı zamanlarda olmak üzere alınan ağırlıkların tümüdür.

Burada bireysel gözlem ya da gözlem topluluğu (örneklem) kavramları verinin yapısını tarif eder. Bireysel gözlemin ölçtüğü gerçek özellik, karakter ya da değişken olarak ifade edilmelidir. Bu konuya daha sonra değinilecektir.

Bu üçlü terim grubuna diğer bir örnek vermek gerekirse;

Herhangi bir gölde yaşayan, sazan balıkların tümü populasyonu oluşturur. Bu örnekle ilgili çalışmaya geçildiğinde pratikte göldeki bütün balıkları toplamak imkansızdır. Bu durumda göldeki populasyondan alınan belli sayıdaki balıkların tümü “örneklem” ya da “örnek grubu” olarak ifade edilir. Tabii burada her bir balık da “birimi” göstermektedir.

Bu noktada biyolojik populasyon kavramını vurgulamak gerekir. **Biyolojik populasyon;** Belli bir zamanda, belli bir alanda, belli bir türe ait olan bütün bireyler, populasyonu oluşturur.

İstatistiksel manada populasyon ise herhangi bir alanda, zaman ve mekan bakımından sınırlandırılmış bir örneklem ya da bireysel gözlemler topluluğudur. Populasyon bazen istatistik anlamda evreni de ifade eder.

* Eğer 5 erkek seçer ve bunların lökosit sayısını tespit edersek, insan türünün erkek bireylerini temsil eden bir örneklem elde etmiş oluruz.

Diğer taraftan populasyona sınırlama getirilirse;

* Mesela 20 yaşında 5 çinli erkekte lökosit sayılırsa, bu gözlem grubu 20 yaşındaki çinli erkekleri temsil eder.

3. Veri : N (ya da n) birim ve bu birimlerin k değişkeninden elde edilen doğru, geçerli, tutarlı ölçeklerle saptanan değerler dizisine **veri** adı verilmektedir.

Bilimsel araştırma ancak veriler aracılığı ile yapılır. Bu verilerin standart ölçme teknikleri ile saptanan sayılardan oluşmasına özen göstermek gerekir. Değişkenin boyutunu ölçmede kullanılacak ölçme aracının standart bir ölçme aracı olması verilerin istatistiksel özelliklere sahip veriler olmasını sağlayacaktır.

Veriler doğru, güvenilir, örneklem hatası düşük, sistematik hata taşımayan değerlerden oluşmalıdır. Bu özelliklere sahip veriler aracılığı ile bilimsel sonuçlara ulaşılabilir.

Ölçme : Bir değişkenin özelliklerinden oluşan bir deneysel gözlemler kümesinin, bu büyüklüğü ölçecek sayılar kümesi ile karşılaştırılması ve her bir büyüklüğün sayı kümesindeki bir sayı ile eşlenmesini sağlama işlemine **ölçme (measuring, scaling)** denir.

Ölçek : Matematiksel özellikleri belli ölçümler kümesine **ölçek (scale, measure)** denir. Her bir özelliğin büyüklüğünü ölçmeye yarayan farklı ya da benzer ölçekler bulunmaktadır. Örneğin fiziksel büyüklükleri ölçmeye yarayan uzunluk, yoğunluk, ağırlık, sıcaklık vb. ölçekler gibi.

Ölçekleri aşağıdaki gibi gruplara ayırmak mümkündür.

1) Uzunluk, yükseklik, derinlik ölçekleri
2) Isı, nem, basınç ölçekleri
3) Yoğunluk ölçekleri
4) Hız ve zaman ölçekleri
5) Miktar ölçekleri
6) Bilgi, tutum ve davranış ölçekleri
7) Deneysel gözlem / değerlendirme ölçekleri

Ölçme Aracı : Bir değişkenin büyüklüğünü sayısal hale getirmek için kullanılan ölçeklere, ölçme ve değerlendirme testlerine verilen isimdir (measuring tools, scaling tools vs.).

Ölçüm : Ölçme işlemi sonucunda değişkenin büyüklüğünü sayı kısmındaki karşılığı olan değer ile ifade edilmesine **ölçüm** (measurement, observation) denir.

Birimin her bir değişkeni için elde edilen ölçümler ölçü birimleri ile belirtilirler. Tek başına bir sayısal değer veri olarak kabul edilemez. Bu sayısal değerin hangi değişkenin ölçümü olduğu ve biriminin ne olduğu (m, cm, gr, mmHg gibi) belirtilmelidir.

Ölçü Birimi : Bir ölçme aracının karşılaştırmaya esas alınan standart büyüklük ölçüsüne **ölçü birimi** (unit, measuring unit) denir. Ölçme işlemi, bir büyüklük içinde ölçeğin ölçü birimi bakımından kaç tane bulunduğunu belirlemektir.

Bazı ölçü birimlerinin alt ve üst katları varken bazı ölçü birimlerinin yoktur (uzunluk x sıcaklık gibi).

Ölçmede ölçü biriminin kullanılması ve bu birimin standart özellikleri değişkenlerin objektif ya da subjektif kriterlere göre sayısallaştırılması ayrımını belirler.

Ölçülebilirlik

Bir değişkenin büyüklüğünün uygun olan bir ölçme aracı ile sayısallaştırılabilmesine **ölçülebilirlik** (measurability) denir. Birimlerin değişkenlerinin bilimsel araştırmalara konu olması için mutlaka ölçülebilir olması gerekir.

Araştırmalarda incelenen değişkenlerin uygun bir şekilde, anlamlı rakamlarla ifade edilebilir (ölçülebilir) nitelikte olması gerekir. Ölçülebilirlik ve bu ölçülebilirliğin fiziksel ölçme araçlarına yakınlığı ya da uzaklığı değişkenlerin tiplerini tanımlamada önemli rol oynamaktadır (Nitel/nicel, fiziksel/davranışsal vb.).

Ölçek ve istatistiksel çözümleme arasında çok önemli ilişkiler vardır. Bir değişkene atanan değer objektif kriterler ile belirlenmiş ise bu ölçümlerin istatistiksel yöntemlerle çözümlenmesi ile ortaya çıkan sonuçların yorumları yüksek oranda tutarlı olmaktadır.

DEĞİŞKENLER VE ÖZELLİKLERİ

Her biyolojik disiplin, kendi değişken takımına sahiptir. Morfolojik ölçümler, vücut sıvılarındaki kimyasalların konsantrasyonları, belli biyolojik olayların oranları, genetikteki bazı olayların frekansları bunlara örnektir.

Değişken : Değişken Bir örneklem içerisindeki bireylerin, birbirinden belli bir şekilde farklılık gösterebileceği herhangi bir özelliktir. Eğer bu özellik, örneklem içerisinde bireyden bireye değişmiyorsa istatistik açıdan önemi yoktur. Uzunluk, ağırlık, diş sayısı, vitamin C muhtevası ve genotipler değişken örnekleridir. Memeliler grubunda sıcakkanlılık bir değişken değildir, çünkü hepsi aynı niteliktedir. Elbette ki, memeli bireylerinde vücut sıcaklığı farklıdır ve bu bir değişkendir. Biyolojideki değişkenler aşağıdaki gibi sınıflandırılabilir.

Değişkenler;

1. **Ölçülebilir Değişkenler**
   a) **Sürekli Değişkenler (Metrik karakterleri ölçer)**
   b) **Kesikli (Aralıklı) Değişkenler (Meristik karakterleri ölçer)**

2. Sıralanabilir Değişkenler

3. İsimsel Değişkenler (Nitelikler,Vasıflar = Özellikler)

1. Ölçülebilir Değişkenler, farklı durumların sayısal bir sıra ile ifade edilebildiği değişkenlerdir. İkiye ayrılırlar.

a) Birincisi **sürekli değişkenler**dir. Teorik olarak, iki sabit nokta arasında sonsuz sayıda değer olabileceği varsayımını yapar. Mesela 1.5 ve 1.6 cm ‘lik uzunluklar arasında sonsuz sayıda uzunluk ölçümü alınabilir. Tabii yeterince hassas ölçme aleti var olduğu sayılırsa. Mesela 1.57 mm’lik bir uzunluk ölçümü sürekli değişkendir ve bu yüzden gerçek sayıya bir yaklaşım olarak kabul edilir. Biyolojideki birçok değişken, sürekli değişkendir. Mesela uzunluk, alanlar, hacimler, ağırlıklar, açılar, sıcaklıklar, zaman periyotları, yüzdeler ve oranlar.

b) Sürekli değişkenlerin aksine **süreksiz (aralıklı) değişkenler** meristik ya da kesikli değişkenler olarak bilinir. Bu değişkenlerin belli sabit sayısal değerleri vardır ve ara değerleri yoktur. Mesela, bir böceğin bacağındaki segmentlerin sayısı 4, 5 ya da 6’dır. 5.5 ya da 4.3 olamaz. Aralıklı değişkenlere örnek olarak, segment, diş, pul, ışın, yumurta sayısı, birey sayısı verilebilir.

2) Bazı değişkenler ölçülemez ama en azından büyüklüklerine göre sıralanabilir ya da dizelenebilirler. Mesela pupaların açılma sırası, zaman ölçülmeden 1., 2.,3. olmak üzere sıralanabilir. Bu gibi durumlarda veriye **sıralı değişken** denir. Değişken sıralı olarak nitelendirildiğinde büyüklükleri arasındaki fark önemli değildir. 1'in 2'ye eş olup olmaması ya da 2 ve 3 arasındaki farkla orantılı olup olmaması önemli değildir (öğrenim durumu, okur yazar değil, ilk, orta, lise, yüksek öğrenim....ya da yerleşim yeri, köy, kasaba, kent, metropol gibi).

3) Ölçülemeyen ancak nitel olarak ifade edilen özellikler **"nitelik"**, **"vasıf"** olarak isimlendirilir. Böyle değişkenlere **isimsel değişkenler** de denir. Bunlar, ölü-canlı, erkek-dişi (dikotom) veya renk (siyah, beyaz, mavi) (polikotom) gibi vasıflardır. Bu gibi özellikler frekanslarla birleştirilince, istatistik olarak işlem görebilir. Mesela, 80 fare'nin 4'ü siyah, 2'si beyaz ve geri kalanı gri ise, özellikler frekanslarla birleştirilmiş olur. Böylece veri sayısallaştırılmış olur ve tablolaştırıldıktan sonra istatistiksel olarak analiz edilebilir.

Renk	Frekans
Siyah	4
Beyaz	2
Gri	74
Toplam	80 gibi.

Bazı durumlarda nitelikler, istenildiği takdirde sürekli değişkenlere çevrilebilirler. Mesela, renkler dalga boyuna ya da renk kontrol tablosuna göre ölçülebilir değişkenlere çevrilebilir. Diğer birçok nitelik de kodlanarak, sıralı değişkene çevrilebilir. Mesela, bir yapının üç özelliği; "az gelişmiş", "normal gelişmiş" ve "çok gelişmiş" şeklinde 1, 2 ve 3 olarak kodlanabilir.

VERİLERİN DOĞRULUĞU VE DUYARLILIĞI

Doğruluk (Accuracy), ölçülen ya da hesaplanan bir değerin gerçek değere yakınlığını ifade eder.

Duyarlılık (Precision) ise aynı niceliğin tekrarlı ölçümlerinin birbirine yakınlığıdır (=uyumu).

Hassas ancak hatalı bir ölçek doğru olmayan ancak duyarlı ölçüm sonuçları verebilir. Eğer ölçü aracında hata yoksa, duyarlılık sonuçları doğruya götürür. Bu yüzden önce "duyarlılık" terimini tartışmak gerekir.

Duyarlı (kesin) değerler genellikle (her zaman) olmasa bile tam sayılardır. Mesela kümeste 4 yumurta varsa ve doğru sayılmışsa bu kesin değerdir. 3 ya da 5 değildir veya 4.5, 4.3 olamaz. Meristik (sayılabilir) karakterler genellikle tam sayılardır. Sürekli değişkenler eğer meristik karakterlerden elde edilmişse yine tam sayılar olabilir. Mesela tam sayılar arasındaki oranlar; bir hayvan kolonisinde 18 dişi ve 12 erkek varsa, dişilerin erkeklere oranı 1.5'tur. Bu hem sürekli değişken hem de tam sayıdır.

Bir çok sürekli değişken ise, "yaklaşık değerdir". Bunun manası, tek bir ölçümün yani varyantın tam değeri bilinmiyor ya da bilinemez olabilir. Ölçümün son basamağı duyarlılığı gösterir. Yani gerçek değerin arasında bulunduğu ölçek sınırlarını. Mesela 12.3 mm'lik bir uzunluk ölçümü 12.25 ile 12.35 mm arasında bir yerlerdedir. Tam olarak biz gerçek değerin nerede olduğunu bilmiyoruz. Peki 12.25'lik bir değer hangi gruba (12.2 ya da 12.3 'mü) konmalıdır ? Bu tartışma yapılmalıdır. Çünkü biz 12.3 ya da 12.2 yazarken üst ya da alt sınıfa dahil etme işlemi zaten yapılmıştır. Bu karar keyfi değildir. Ancak ölçmenin ölçeğine göre değişir. Eğer ölçek duyarlı ise ve 12,25 doğru olarak ölçülmüşse, 4 basamaklı rakam doğrudan yazılabilir. Duyarlılık limitleri son yazılan basamaktan sonra bir basamak daha gerektirir. Eğer değerimize bir basamak daha ilave etmek istiyorsak, duyarlılığı artırmamız gerekir.

	Duyarlılık sınırları
193	192.5 – 193.5
192.8	192.75 – 192.85
192.76	192.755 – 192.765

Bu ölçümlerin aynı yapıya ait olduğunu ve gerçek değerin 192.758 olduğunu kabul edelim. Bu durumda, üç ölçümün yukarıdan aşağıya doğru gidildikçe hassasiyeti artar.

Bazı sayısal değerlerin basamak sayısını azaltmak gerektiğinde yuvarlama işlemi yapılır. Bu basittir. Son basamak 5'den küçükse yuvarlama yapılmaz. 5'ten büyükse bir üst basamağa taşınır. Ancak 5'ten sonra 0 rakamı varsa bu yuvarlanmaz.

TÜRETİLEN VERİLER

Biyometri çalışmalarında kullanılan değişkenlerin büyük çoğunluğu, doğrudan ölçümler, sayımlar ya da çeşitli cihazlardan elde edilen sonuçların okunmaları şeklindedir. Ancak , biyolojik araştırmalarda önemli bir değişken sınıfı daha vardır. Bunlara **türetilmiş** ya da **hesaplanmış değişkenler** denilir ve genellikle iki ya da daha fazla değişkenin bağımsız ölçümleri arasındaki ilişkinin belli bir şekilde açıklanmasıyla elde edilir. Bunlar, oranlar, yüzdeler, katsayılar gibi.

Oran (ratio): Bir değişkenin diğerine göre durumunu ifade eder.

Mesela 64:24 ya da 64:24

Yaban form Mutant form

erkek dişi

ya da

parazitlenmiş parazitsiz

Sürekli değişkenler üzerinde de oranlar belirlenebilir. Bir böceğin sklerit uzunluğunun genişliğine oranı 1.2 : 1.8 gibi.

Yüzdeler de oranlar gibidir ve biyolojide çok sık kullanılır. Oranlar tam sayıya çevrilebilir. Mesela, 64/24⇒2.666 ya da 1.2/1.8⇒0.666 gibi. Ancak oranların bazı dezavantajları vardır. Özellikle de duyarlılık konusunda. Mesela 1.2, 1.15 ile 1.25 arasında bir değer, 1.8 ise 1.75 ile 1.85 arasındadır. Dolayısıyla gerçek değerin 1.15/1.85 ile 1.25/1.75 ya da 0.622 ile 0.714 arasında bir yerde olacağı düşünülür. Bu da % 4.2'lik bir hataya denk gelir. İkinci bir dezavantaj ise oranlar ve yüzdelerin dağılımı genellikle normal olmayabilir. Bu yüzden de istatistiksel testlerin uygulaması imkansız olur. Ayrıca oranların iki değişken arasındaki ilişkiyi belirlemesi mümkün değildir.

Katsayılar ise bir anotomik değişkenin, daha büyük olan ve standart kabul edilen bir değişkene bölümüyle elde edilir. Mesela, fiziksel antropolojideki kafatası indeksi (katsayısı) buna örnektir. Veya, gonadosomatik indeks, gonad ağırlığının /gonadsız vücut ağırlığına oranı gibi.

Orantı (rates) (=oran) : Biyolojik araştırma alanlarında önemli bir diğer ölçümdür. Birim ağırlıktaki madde miktarı, birim zamanda kazanılan ağırlık (büyüme oranı), birim zamandaki ölüm sayısı (ölüm oranı), birim populasyondaki doğum sayısı (üreme oranı) gibi .

II. BÖLÜM

BELİRTİCİ İSTATİSTİKLER (Descriptive Statistics)

Belirtici istatistikler veri setinde yer alan değişkenleri özetleyen, tanıtan değerlerdir. n birime ait verinin genel eğilimi, yayılımı ve belirli değerler etrafında yığılmaları hakkında bilgi edinmek için belirtici istatistikler hesaplanır.

Belirtici istatistikler

a) Yer Ölçüleri (measures of location)
b) Dağılım Ölçüleri (measures of spread) olarak iki grupta incelenir.

Yer Ölçüleri:

Yer ölçüleri, verilerin merkezi eğilimlerini ve verilerin belirli yüzdelerinin hangi değerlerde toplanma eğilimi gösterdiğini belirten değerlerdir. Bu istatistikler populasyon parametresini tahmine yardımcı olur.

- Aritmetik ortalama (Mean, average)
- Geometrik ortalama (Geometric mean)
- Harmonik ortalama (Harmonic mean)
- Düzeltilmiş ortalama (Trimmed mean)
- Ortanca (Medyan)
- Çeyrek (Quartile) ve yüzdelik (Percentile) değerleri
- Mod (Tepe)

Dağılım Ölçüleri:

Verilerin dağılım biçimini, ortalama etrafında değişimini, yayılmalarını ve serpilmelerini belirlemeye yarayan ölçülerdir.

- Dağılım aralığı (Değişim genişliği, Range)
- Varyans (Variance)
- Standart sapma (Standard deviation)
- Standart hata (Standard error of mean)
- Basıklık (Tepeleşme, kurtosis)
- Çarpıklık (Asimetri, Skewness)
- Değişim katsayısı (Coefficient of variation)
- En küçük değer (Minimum)
- En büyük değer (Maximum) olarak hesaplanır.

Şimdi bu istatistiklerin hesaplanma biçimlerini açıklayalım.

A. YER ÖLÇÜLERİ

1. Aritmetik Ortalama

En yaygın olarak kullanılan yer ölçüsüdür. Ortalama ya da averaj olarak söylenir ve $\overline{X}$ (ya da $\overline{Y}$) ile gösterilir. Aritmetik ortalama tüm ölçümler toplamının, ölçüm sayısına bölümü ile elde edilir.

Mesela oksijen konsantrasyonunu ölçen dört değer;

14.9
10.8
12.3
23.3
Toplam=61.3

$$\text{Ortalama} = \frac{\text{toplam}}{n}$$

$$\text{Or.} = \frac{61.3}{4} = 15.325$$

"Σ" toplama işaretidir.

$\sum_{i=1}^{n} X_i$ nin açıklaması (X_1+ X_2+ X_3+............+ X_n) şeklindedir.

Yani i=1, toplama işleminin 1. değerden başlamak üzere yapılacağını ve i=n. değere kadar devam edeceğini gösterir. Bu durumda $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ şeklinde yazılabilir. Bu ifadeyi sadeleştirirsek; $\overline{X} = \frac{\sum X}{n}$ şeklinde ifade edilebilir. Çünkü "Σ" işareti bir değişkenden önce yazılıyorsa, bu o değişkene ait "n" sayıda değerin toplanacağını gösterir.

Ortalama, bize bir örneklemdeki gözlemlerin merkezini belirler. Çan eğrisi biçiminde simetrik eğri gösteren verileri en iyi temsil eden merkezi eğilim ölçüsüdür. Analitik karşılaştırmalarda en sık kullanılan istatistiktir.

*__Aritmetik ortalamanın en önemli sınırlayıcı özelliklerinden biri uç (ekstrem) değerlere çok duyarlı oluşudur. Bu durumda merkezi noktayı temsil edemez.__

Örnek : 3.2 kg, 2.9 kg, 2.8 kg, 3.1 kg, 4 kg ağırlığında doğan bebeklerin doğum ağırlıklarının ortalaması gibi. Beşinci değer gerçek merkezi noktayı önemli ölçüde saptırmaktadır.

2. Geometrik Ortalama (Geometric Mean)

Bazı durumlarda değişkenleri logaritmalarına çevirmek gerekebilir. Mesela birçok laboratuar verisinde değerler 2'nin katları ya da 2'nin kuvvetleri şeklinde olan bir katsayıyla çarpılmıştır. Bu durumda verilerin belli bir şekle girmesi gerekir. Çünkü aritmetik ortalama, dağılım çok fazla eğimlendiğinden gerçek merkezi nokta olamaz. Bunun çözümü ise değerlerin logaritmik dönüşümleriyle çalışmaktır. Böylece değerler eşit aralıklı hale getirilmiş olur ve böylece dağılım eğrisellikten kurtulur. Elde edilen logaritmik değerlerin aritmetik ortalaması alınır.

$$\overline{\log X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log Xi$$

Ve daha sonra $\overline{\log X}$ 'in antilogaritması alınarak, geometrik ortalama bulunmuş olur.

$$\overline{X}_G = \text{anti}\log \overline{\log X}$$

3. Harmonik Ortalama

Genellikle T zaman periyodunda toplanmış ve zaman içinde düzenli ya da düzensiz dalgalanmalar gösteren veri dizilerinin merkezi eğilimini belirlemekte yararlanılır. $\overline{X}_H$ ile gösterilir. n birim sayısının, değerlerin tersleri toplamına bölünmesi ile hesaplanır.

$\overline{X}_H = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x}$ biçiminde hesaplanır.

*** Bireysel gözlem değerleri değişmediği sürece, geometrik ortalama daima aritmetik ortalamadan, harmonik ortalama ise geometrik ortalamadan küçüktür.**

4. Düzeltilmiş Ortalama

Dizide aşırı uçlarda yer alan değerlerin fazla olduğu durumlarda, uçlardaki aşırı sapan değerleri en yakın değere yuvarlayarak (örneğin %5) hesaplanan merkezi eğilim ölçüsüdür.

5. Medyan (Ortanca Değer)

Merkezi nokta ölçümünün bir alternatifi ve belki de aritmetik ortalamadan sonra en yaygın olarak kullanılan "medyan"dır.

Değerleri küçükten büyüğe dizilmiş bir veri takımında, dağılımı bir birim olarak iki eşit parçaya ayıran yer ölçüsüdür. Örnek sayısı az olan, dizideki küçük ve büyük değerlerin aşırı uçlarda yer aldığı dağınık ve simetri özelliği göstermeyen dizilerin merkezi eğilimini belirtmekte yararlanılır. Sınıflanmış ya da sınıflanmamış dizilerde birim sayısının tek ve çift olmasına göre farklı biçimlerde hesaplanır.

Örn: 5 ölçüm değeri; 14, 15, 16, 19, 23 olsun. Medyan $\frac{n+1}{2}$ 'inci değerdir. Yani 3. değerdir. Burada M = 16'dır. Çünkü 3. değer diziyi iki eşit parçaya ayırmıştır.

Ancak örnek sayısı çift olduğunda mesela 14, 15, 16, 19 olduğunda

$$M = \left[\frac{n}{2} + \left(\frac{n}{2} + 1\right)\right] / 2$$ biçiminde hesaplanır.

$$M = \left[\frac{4}{2} + \left(\frac{4}{2} + 1\right)\right] / 2$$

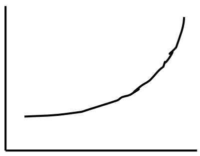
$$M = [2 + 3] / 2 = 2.5$$

Buda medyanın 2. ve 3. değerlerin orta noktası olduğu anlamına gelir ki, bu dizide 15.5 demektir.

***Aritmetik Ortalama ve Medyanın Karşılaştırılması**

- ✓ Eğer bir dağılım simetrikse, medyanın her iki tarafındaki noktaların nispi pozisyonu aynıdır.
- ✓ Eğer bir dağılım, pozitif eğim (sağa doğru bükülmüşse) gösteriyorsa, medyanın üzerindeki noktalar, medyana mutlak değer olarak aşağıdaki noktalardan daha uzak olma eğilimindedir.

- ✓ Benzer olarak negatif eğim varsa,aşağıdaki noktalar üstteki noktalardan daha uzak olma eğilimindedir.



6. Çeyrek Değerler (Quartile)

Değerleri küçükten büyüğe dizilmiş bir dizide dağılımı 4 eşit parçaya bölen değerlerdir. Bu değerler 1. çeyrek (Q_1), ortanca (OD, M_1) ve 3. çeyrek (Q_3) olarak isimlendirilir.

1. Çeyrek (1st Quertil, Q_1) : Dağılımı ¼ solda ve ¾ sağda olmak üzere iki parçaya ayıran yer ölçüsüdür.

$Q_1 = X((n+1)/4)$ biçiminde hesaplanır.

Örn: 11 birimlik boy uzunlukları; 161, 167, 172, 183, 170, 169, 174, 176, 165, 182, 190,

Sıralanmış değerler; 161, 165, 167, 169, 170, 172, 174, 176, 182, 183, 190’dır.

Boy değerleri için 1. çeyrek X(12/4) = X(3) = 167 cm’dir.

3. Çeyrek (3^{rd}Quartil, Q_3) : Dağılımı ¾ solda, ¼ sağda olmak üzere iki parçaya ayıran yer ölçüsüdür.

$Q_3 = X((3n+1)/4)$ biçiminde hesaplanır.

Aynı örnek için ; Q_3 = X (3*(11+1)/4)= X(9) = 182 cm'dir.

n sayısı çift olduğunda hesaplama aşağıdaki gibidir.

n=12 ise Q_1 = X((n+1)/4) = X(3.25) = X(3) + 0.25(X(3)-X(2)) biçiminde hesaplanır. Burada X(3) 3. gözlem demektir.

Q_3 = X(3(n+1)/4) =X(19.75) = X(9)+ 0.75(X(10)-X(9))

Örnekte 12. bireyin değeri 193 cm olsun.

n=12 için Q_1 = 167+0.25(167-165)=167.5 olur.

Q_3 = 182+0.75(183-182)=182.75 olur.

7. Yüzdelik Değer (Percentiles)

Değerleri küçükten büyüğe dizilmiş bir dizide dağılımı yüz eşit parçaya ayıran yer ölçüleridir. Yüzdelikler içinde en sık kullanılanları 5. yüzdelik (p%5), 10. yüzdelik (p%10), 20. yüzdelik(p%20), 80. yüzdelik(p%80), 90. yüzdelik(p%90) ve 95. yüzdelik(p%95) değerleridir.

P(%25) = 1. çeyrek, P(%50) = Ortanca, P(%75) = 3. çeyrek olduklarından hesaplanmazlar.

Yüzdeliklerin hesaplanması, çeyreklerin hesaplanmasına benzerlik göstermektedir. Dizideki birim sayısı;

Tek ise ; P % k = X((kn+1)100)biçiminde

Çift ise ; P % k = X(k(n+1)/100) biçiminde hesaplanır.

8. Mod (Tepe)

Diğer bir yer ölçüsü (=merkez nokta) ise moddur. Mod bir örneklemede en sık tekrarlanan ölçüm değeridir. **Diğer bir söyleyişle frekansı en yüksek olan gözlem değeridir.** Verilerin dağılımında tek bir mod ya da tepe gözleniyorsa bu tip dağılıma **unimodal dağılım** denir. Frekans dağılımı hazırlanan bir örneklemde frekansı en yüksek olan (unimodal) değer yani mod, tepe noktasını oluşturur. Bazı dağılımlarda, eşit olmamakla birlikte iki tepe oluşabilir. Bu tip dağılımlara ise **bimodal dağılım** adı verilir. Tepe sayısı ikiden fazla ise **multimodal** ya da **polimodal** adını alır. Bazı durumlarda ise U biçimli dağılımlar oluşur.Bu durumda orta ve düşük değere **antimod** adı verilir. Mod bazen merkez noktadan çok uzak olabilir.

Unimodal, simetrik dağılımlarda, ortalama, medyan ve mod aynı noktadadır. Asimetrik bir dağılımda ise (sağa doğru uzamış) dağılımın uzun ucuna, en yakın olan ortalama, en uzak olan ise mod'dur. Medyan ise ikisinin arasında bulunur.

B. DAĞILIM ÖLÇÜLERİ

1. Değişim (Dağılım) Aralığı (Range, Ranj)

Bir dizideki en büyük değer (X_{max}) ile en küçük değer (X_{min}) arasındaki farka **değişim aralığı** adı verilir.

$DA = X_{max} - X_{min}$

biçiminde hesaplanır.

Ranjın birimi, başlangıçtaki yani farkları alınan değerlerin birimi ile aynıdır. Avantajı hesaplanmasının kolay olmasıdır. Ranj tek bir fazladan değerle bile etkilenebilir, o yüzden kaba bir dağılım ölçüsüdür. Yani başka bir deyişle ekstrem değerlere fazla duyarlıdır. Diğer bir dezavantajı ise, örnek büyüklüğüne (n) bağımlı olmasıdır. n ne kadar büyük olursa ranjın büyük olma eğilimi o derece artar. Bu yüzden ranj farklı büyüklükteki veri takımlarının karşılaştırılmasında zorluk yaratır.

2. Varyans (s^2) :

Eğer bir örneğin merkezi, aritmetik ortalama olarak kabul edilirse her bir örnek nokta ve aritmetik ortalama arasındaki fark ya da sapma $X_1-\bar{X}$, $X_2-\bar{X}$, $X_3-\bar{X}$ .... $X_n-\bar{X}$ biçiminde yazılabilir. Bu sapmaların ortalaması alındığında pozitif ve negatif sapmalar sonucu ortalama her zaman "0" çıkar. Bunu engellemek için sapmaların kendisi yerine, sapma karelerini kullanmak gerekir. Bu durumda, hesaplanan dağılım ölçüsü, s^2 ;

$$s^2 = \mathrm{var}(x) = \frac{\Sigma\left(x - \bar{x}\right)^2}{n-1}$$ şeklinde olur.

Yani varyans, bir dizideki değerlerin ortalamadan farklarının kareleri toplamının serbestlik derecesine (n-1) bölümüyle hesaplanan bir dağılım ölçüsüdür. Varyansın diğer yazılış şekli,

$$s^2 = \frac{\Sigma x^2 - \frac{(\Sigma x)^2}{n}}{n-1}$$ dir.

*** Varyansın birimi değişkenin ölçü biriminin karesine eşittir.**

3. Standart Sapma (Standard Deviation, SD,St dev, Ss)

Varyansın karekökü alınarak bulunan bir standart dağılım ölçüsüdür. Birimi değişkenin ölçü birimine eşittir.

$$s = \sqrt{\mathrm{var}(x)} = \sqrt{\frac{\Sigma\left(x - \bar{x}\right)^2}{n-1}}$$

biçiminde hesaplanır.

4. Standart Hata (Standart Error of Mean, Se, SEM, Sh)

Standart sapmanın birim sayısının kareköküne bölünmesiyle bulunan bir dağılım ölçüsüdür. Birimi değişkenin ölçü birimi ile aynıdır.

$$S.h_{x} = \frac{Ss}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{s^2}{n}}$$

*** Ortalama ve standart sapma en yaygın kullanılan merkez nokta ve dağılım ölçüsüdür.**

Bunun en temel sebebi, normal dağılımın (çan şekilli dağılım ya da Gaussian dağılımı) en iyi bu iki parametreyle tanımlanabilir olmasıdır. Bu yüzden biyolojide geniş kullanım alanı vardır.

5. Değişim Katsayısı (Coefficient of Variation) (%CV, DK%)

Bir dizinin standart sapmasının ortalamasına bölünmesi ve 100 ile çarpılması ile bulunan bir dağılım ölçüsüdür. Ölçü birimleri birbirinden farklı iki ya da daha fazla değişkenin dağılım yoğunluklarını karşılaştırmak amacıyla yararlanılan bir ölçüdür. Birimi yoktur. Yüzde olarak ifade edilir. DK % ile gösterilir.

$DK\% = \frac{Ss}{\bar{x}} * 100$ biçiminde hesaplanır.

Değişim katsayısı en çok, farklı aritmetik ortalamaları olan, farklı örnek gruplarının değişkenliğini karşılaştırmada kullanılır. Çünkü ortalama yükseldikçe değişkenliğin artması beklenir ve DK bu değişkenliğin ölçüsüdür.

GRUPLANMIŞ VERİLER (FREKANS DAĞILIMLARI)

Bir frekans dağılımı, bir veri takımındaki değerlerin frekansları ile birlikte sıraya konulmuş halidir. Frekans o değerin veri takımı içerisinde kaç kere bulunduğunu gösteren değerdir. Buna ilaveten örnek noktaların yüzdeleri de genelde verilebilir.

Eğer tek bir örneklem içerisinde değerlerin sayısı fazla ise, frekans dağılımı gereğinden fazla büyük olabilir. Bu durumda veriler daha geniş kategorilere gruplanırlar. Veriler aşağıdaki şekilde gruplanır.

1) Veriler alt sınırı X_1 ve üst sınırı X_{k+1} olan, k sayıda aralığa bölünür.

2) 1. aralık X_1'den X_2' ye, 2. aralık X_2'den X_3' e (X_2 dahil, X_3 hariç) ......k. ve son aralık X_k'dan X_{k+1}'e kabul edilmektedir. Bu kabuldeki mantık bütün değerlerin dahil olabileceği bir grup aralığı belirlemek ve çakışmaları önlemektir.

3) Grup aralıkları genellikle eşit seçilir, ancak yine de grup aralıklarının eşit olup olmaması konu seçimine bağlıdır. (Mesela balığın boy frekansında eşit aralık gerekirken, yemlenme sıklığında değişik aralıklar tercih edilebilir.

4) Her aralık içerisindeki bireylerin sayısı belirlenir.

5) Her grup aralığında orta nokta, belirtici istatistiklerde kullanılmak üzere belirlenir.

Birinci aralığın orta noktası ;

$$m_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

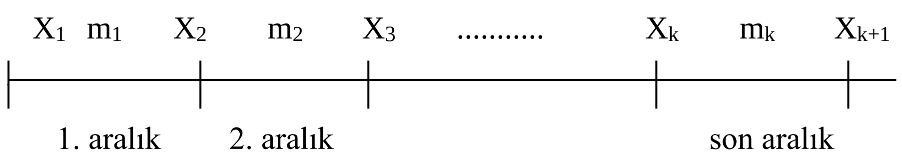
İkinci aralığın orta noktası ;

$$m_2 = \frac{x_2 + x_3}{2}$$

ve son aralığın orta noktası ;

$$m_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$$

Aralıklar ve orta noktaları şu şekilde gösterilebilir.



6) Son olarak belirtici istatistikleri hesaplamak amacıyla grup aralıkları ve orta noktaları (m_i) ve frekansları (f_i) bir tablo olarak yazılır.

Grup Aralığı	Orta noktası	Frekansı
$\geq X_1, < X_2$	m_1	f_1
$\geq X_2, < X_3$	m_2	f_2
....	......	....
$\geq X_k, < X_{k+1}$	m_k	f_k

Bundan sonra grup ortalamalarını ve varyansını hesaplayabiliriz. f_i gözlemlerinin i. grup aralığında i=1,.......,k ve i. aralığın orta noktasının $m_i \Rightarrow$ i=1,.....,k olduğunu varsayalım. $n = \sum_{i=1}^{k} f_i \Rightarrow$ bütün gruplardaki toplam gözlem sayısı olsun. Bu durumda gruplanmış ortalama aşağıdaki gibi tanımlanır.

Gruplanmış ortalama ;

$$\overline{X}_g = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i m_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$ şeklinde olur.

Grup varyansı ise ;

$$S_g^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i \left(m_i - \overline{X}_g\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^{k} f_i\right) - 1}$$ şeklinde olur.

Ya da ;

$$S_g^2 = \frac{\sum f_i m_i^2 - n\overline{x_g}^2}{(n-1)}$$ şeklinde yazılabilir.

Örn : Herhangi bir çalışmada veriler alındığında hesap ve yorumlamalara uygun olarak düzenlenmelidir. En basit yoluyla mesela, büyüklüğe göre düzenlenebilir.

7, 6, 5, 7, 8, 9, 6, 7, 4, 6, 7 $\Rightarrow$ 9, 8, 7, 7, 7, 7, 6, 6, 6, 5, 4

Burada bazı değerlerin tekrarlı olduğuna dikkat ediniz.

Örnek sayısı çok fazla olduğunda bu tip tekrarlı değerlerin söylenmesi ve analiz edilmesi zaman alıcı ve yorucu olabilir.bu durumda tekrarlanan değerleri, kaç kere tekrar edilmişse bir başka deyişle frekanslarıyla yazmak ve tablolaştırmak gerekir. 9, 8, 7 (x4), 6 (x3), 5 ve 4 gibi. Bu şekildeki bir kısaltma frekans dağılımında bir yoldur. Ancak daha kullanışlı ve kısa bir yol da tablolaştırmadır.

Değişken (x)		Frekans (f)
9	/	1
8	/	1
7	////	4
6	///	3
5	/	1
4	/	1

GRUPLANMIŞ VERİLERDE BELİRTİCİ İSTATİSTİKLER

Örnek : Frekans dağılımı tablosunun hazırlanması ve belirtici istatistiklerin hesaplanması

Tablo 1. (Ham veri) Bir böcek türünde 25 bireyin femur uzunluğu ölçümü (mm)

3.8	3.6	4.3	3.5	4.3
3.3	4.3	3.9	4.3	3.8
3.9	4.4	3.8	4.7	3.6
4.1	4.4	4.5	3.6	3.8
4.4	4.1	3.6	4.2	3.9

Tablo2. Frekans dağılımı

Grup Aralığı	Orta Nokta	Çetele	F
3.25-3.35 (mm)	3.3	/	1
3.35-3.45	3.4		0
3.45-3.55	3.5	/	1
3.55-3.65	3.6	////	4
3.65-3.75	3.7		0
3.75-3.85	3.8	////	4
3.85-3.95	3.9	///	3
3.95-4.05	4.0		0
4.05-4.15	4.10	//	2
4.15-4.25	4.20	/	1
4.25-4.35	4.30	////	4
4.35-4.45	4.40	///	3
4.45-4.55	4.50	/	1
4.55-4.65	4.60		0
4.65-4.75	4.70	/	1
Toplam 15 grup			Σf 25

Görüldüğü gibi bu dağılımda bazı grup aralıklarını temsil edecek birey yok (3.35-3.45, 3.65-3.75, 3.95-4.05 gibi). Bu durum grup ortalamasının hesaplanmasında ya da verilerin yorumlanmasında güçlük yaratabilir. Bu yüzden grup aralığının genişletilmesi ve grup sayısının azaltılması gerekir. Böylece dağılım daha kolay yorumlanabilir hale gelecektir. İlk tabloda görülen 0.1 mm'lik ölçeği iki katına çıkararak yani 0.2 mm'lik aralıklarla yeni grup aralıklarımızı belirleyelim.

Tablo 3. 0.2 mm'lik aralıkla 8 sınıfta gruplama

Grup Aralığı	Orta Nokta	Çetele	f
3.25-3.45	3.35	/	1
3.45-3.65	3.55	/////	5
3.65-3.85	3.75	////	4
3.85-4.05	3.95	///	3
4.05-4.25	4.15	///	3
4.25-4.45	4.35	///////	7
4.45-4.65	4.55	/	1
4.65-4.85	4.75	/	1
Toplam 8 grup		Σf 25	25

Tablo 3'den de görüldüğü gibi veriler daha kolay yorumlanır hale gelmiştir.

***Not :** Grup sayısı örnek sayısına göre ayarlanabilir. Bu, tecrübe kazanıldıkça daha kolay olur. Ancak yine de bazı kuralları vardır. 40 veya 50'nin altındaki örnek sayılarında 12 sınıf kullanılmamalıdır (Daha az olmalıdır). Ancak binlerce verinin bulunduğu dizilerde ise 20'nin altında grup olmamalıdır.

Grup sayısını biraz daha azalttığımızda ise ;

Tablo 4. 0.3 mm aralıkla 5 sınıfa gruplama.

Grup Aralığı	Orta Nokta	Çetele	Frekans
3.25-3.55	3.4	//	2
3.55-3.85	3.7	////////	8
3.85-4.15	4.0	/////	5
4.15-4.45	4.3	////////	8
4.45-4.75	4.6	//	2
			Σf 25

Tablo 4'de görüldüğü gibi bu kez de veriler 3 grupta yoğunlaştı. Hatta bimodal bir dağılım oluşturdu denilebilir. Grup aralığı çok geniş olduğunda yorumlanmak istenen veriler üstüste yığılabilir. O yüzden bu veri grubu için en uygun dağılım tablo 3'deki gibidir.

Şimdi ham verilerden aritmetik ortalama ve gruplanmış verilerde (Tablo 3) belirtici istatistikleri hesaplayalım.

Örnek: Ham verilerden ortalama, varyans, st. sapma ve s. hata hesaplanması (Tablo 1'den);

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$$

$$\Sigma x = 100.10$$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$$

$$\bar{x} = 4.004$$

$$S^2 = \frac{\Sigma(X - \bar{X})^2}{n-1}$$

$$S^2 = \frac{\Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{n}}{n-1}$$

$$\Sigma X^2 = 404.01$$

$$(\Sigma X)^2 = 10020.01$$

$$S^2 = \frac{404.01 - \frac{10020.01}{25}}{24}$$

$$S^2 = \frac{404.01 - 400.80}{24}$$

$$S^2 = \frac{3.21}{24}$$

$$S^2 = 0.13375 = 0.134 = 0.13mm^2$$

$$Ss = \sqrt{\text{var}} = \sqrt{S^2}$$

$$S.s = \sqrt{0.13} = 0.3605 = 0.36mm$$

$$Sh = \frac{s.s}{\sqrt{n}} = \frac{0.36}{5} = 0.072mm$$

Örnek: Gruplanmış verilerden ortalama, varyans, standart sapma ve standart hata hesaplanması

Tablo 5. (Tablo 3'den)

x	f	fx	x^2	fx^2
3.35	1	3.35	11.22	11.22
3.55	5	17.75	12.60	63.00
3.75	4	15	14.06	56.24
3.95	3	11.85	15.60	46.8
4.15	3	12.45	17.22	51.66
4.35	7	30.45	18.92	32.44
4.55	1	4.55	20.70	20.70
4.75	1	4.75	22.56	22.56
	Σf=25	Σfx=100.15	Σx^2=132.90	Σfx^2=404.62

$$\overline{X}_g = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{100.15}{25} = 4.006\text{mm}$$

$$S_g^2 = \frac{\sum f\left(mi - \overline{x}_g\right)^2}{\left(\sum f\right) - 1}$$

$$S_g^2 = \frac{\sum fx^2 - \frac{\left(\sum fx\right)^2}{n}}{n-1} = \frac{404.62 - \frac{10030.02}{25}}{24} = \frac{404.62 - 401.20}{24} = \frac{3.42}{24} = 0.1425 = 0.14\text{mm}^2$$

$$Ss = \sqrt{\text{var}} = \sqrt{s^2} = \sqrt{0.14} = 0.374 = 0.37\text{mm} \qquad Sh = \frac{Ss}{\sqrt{n}} = \frac{0.37}{5} = 0.074\text{mm}$$

Sonuçların Karşılaştırılması

	Ham veri	Gruplanmış veri
$\overline{X}$	4.004	4.006
S^2	0.13	0.14
S.s	0.36	0.37
S.h	0.072	0.074

Gruplanmış Veriler İçin Grafik Metodlar

Bir populasyonda yeni doğanların doğum ağırlıklarını örneklemek istiyoruz ve alınan her bir ölçümü, ağırlığı gösteren x ekseni üzerine işaretliyoruz. Örnek sayılarına göre aşağıdaki gibi bir grafik görüntüsü elde ederiz.

Bu değişimle birlikte görülüyor ki örnek sayısı yeterince artırıldığında, noktalar belli bir dağılıma göre yerleşiyor. Bu noktaların dış hattında değişen eğri değişkenin dağılımını işaret etmektedir. Buradaki değişim bir çan eğrisi şeklini vermektedir. Bunun yanında tek yönde eğimlenmiş, pozitif veya negatif eğimli eğriler de vardır. Bu dağılımlarla ölçülen tepe sayısı, bize populasyonun dağılımı hakkında fikir verir (Tek tepe oluşan frekans dağılımlarına unimodal, iki tepe oluşanlara bimodal denir). Mesela bir balık populasyonunun boy uzunluğunu gösteren bir frekans dağılımında iki ya da daha fazla tepe oluşursa, bu populasyonda farklı yaş gruplarında balık bireylerinin olduğu sonucuna varırız. Çünkü yılın belli bir zamanında yumurtadan çıkan balıkların, bir sonraki yıl aynı zamanda yumurtadan çıkan balıklardan "ortalama boy" bakımından farklı olmaları beklenir ve bu farklılık boy-frekans analizi ile tespit edilebilir (örnek sayısının fazla olması ve balık türünün total yumurtlama yapması şartı ile).

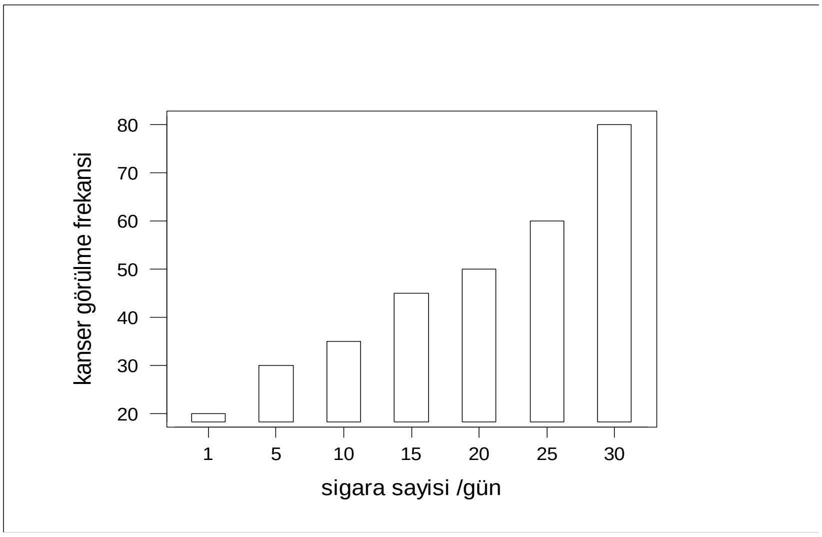
Tablolaştırılan frekans dağılımı verilerinin bazı grafiksel yollarla gösterilmesi mümkündür.

Bar Grafikler :

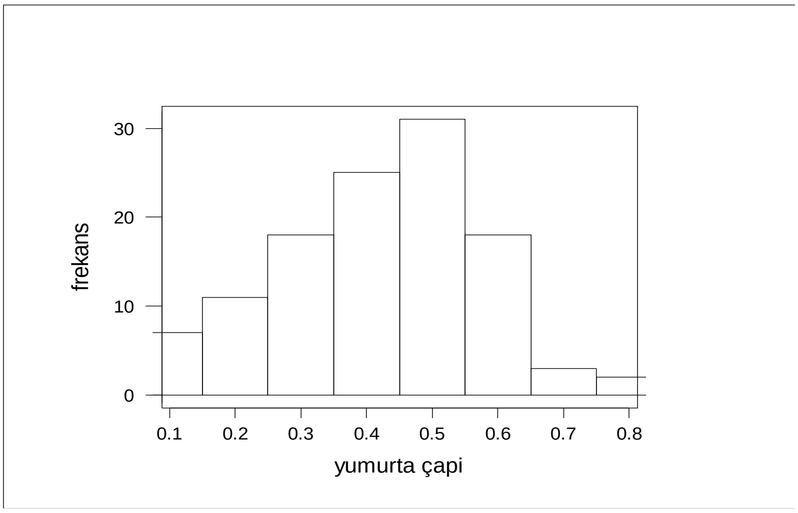
En sık kullanılan metotlardan biridir. Veriler belli sayıda gruba bölünür. Grupların orta noktası belirlenir ve her bir grup aralığı için frekansına uygun yükseklikte bir dikdörtgen oluşturulur. Bar grafikler meristik (sayılabilir) (aralıklı-kesikli değişken) verilerin incelenmesinde kullanılır (Dikdörtgenler arasında boşluk olmalı).

Histogramlar :

Eğer veriler ağırlık, uzunluk, yoğunluk gibi sürekli değişken tipinden oluşuyorsa, histogram kullanılmalıdır. Bu uygulamada da veriler gruplara bölünür ve gruplanır. Orta noktaları belirlenir. Frekansa göre dikdörtgen alanlar oluşturulur. Ancak dikdörtgenler arasında boşluk bulunmaz. Böylece bütün değerler, histograma dahil edilmiş olur.



a) bar grafik



c) histogram

III. BÖLÜM
OLASILIK DAĞILIMLARI

Bir önceki bölümde hazırlamış olduğumuz frekans dağılımlarını, kesin tahminler yaparken (mesela, belli bir olayın gerçekleşme frekansı) ya da bazı yargı ve kararlara varırken (belli bir değerin söz konusu populasyona ait olup olmadığı gibi) kullanırız. Ancak biyolojide, birçok durumda bu tip kararlar deneysel ya da gözleme dayalı dağılımlara göre değil de, teorik bazı kabullere göre yapılır. Elimizdeki verilerin, tabiatta belli bir gücün etkisinde dağılım gösteren bir populasyondan alındığı kabulünü yaparız. Eğer gözlenen veriler, bu kabule dayanan verilerle bağdaşmıyorsa, varsayımlarımızı gözden geçirmemiz gerekir. Bu, frekans dağılımlarının biyolojide kullanımında yaygın bir anlayıştır.

Test edilen varsayımlar, genellikle "olasılık dağılımı" olarak da söylenen teorik frekans dağılımları oluştururlar. Bu 3:1 oranı gibi iki değerli basit bir Mendel çaprazlamasından oluşan dağılım olabileceği gibi, çok daha karmaşık bir dağılım da olabilir. Belli alanlarda hayvan gruplarının yoğunlaşması, territoryal dağılımları, farklı fenotiplerin eş seçme tercihleri gibi durumlar bu dağılımlara örnektir. Bu yüzden belli biyolojik olaylar hakkındaki varsayımlarımızı kontrol etmek için olasılık teorisinden yararlanırız. Bir örnek vermek gerekirse, bir bebeğin kız ya da erkek olarak doğma ihtimali 0.5'tir. Yani her iki olayın gerçekleşme ihtimali eşittir.

- İstatistik manada olasılık 0 ile 1 arasında değer alır. "0" imkansız = gerçekleşme ihtimali yok ; "1" ise tam gerçekleşti yani "olay oldu "demektir.

A) ARALIKLI OLASILIK DAĞILIMLARI (Discrete Probability Distribution)

1. Binomial Dağılım ; B(X;n,P)

Binomial dağılım, n deneme ve P gözlenme olasılığına göre ikili değişim gösteren, kesikli (aralıklı) değişkenlerin veya olayların (X) dağılımıdır.

Bu durumdaki bir olayın olasılık dağılımı $(p+q)^n$ şeklinde ifade edilir. Burada "p" tek bir olayın gerçekleşme ihtimali, "q" ise diğer olayın gerçekleşme ihtimalidir. q = 1-p' dir ve "n" deneme sayısıdır.

Örnek: Örneklem içerisinde bireylerin hasta veya sağlıklı olması ; yeni doğan bebeğin erkek veya kız olması ; dişilerin hamile olması veya olmaması ; yumurtaların açılıp açılmaması gibi durumlar binomial dağılıma örnek oluşturur.

Binomial dağılımda; bu tip bir olayın gerçekleşme olasılığı aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$P(x) = \frac{n!}{(n-x)!\,x!} p^x q^{n-x}$$

n: deneme sayısı

x: beklenen olayın sayısı

n-x: beklenmeyen olayın sayısı

p: beklenen olayın olasılığı

q: beklenmeyen olayın olasılığı

Örnek: Bir ailenin 5 çocuğundan 2'sinin erkek olma ihtimali nedir ? (Her bir doğumda erkek olma ihtimali 0.51'dir.)

n=5, x= 2, n-x= 3, p= 0.51, q=0.49

$$p(x) = \frac{n!}{(n-x)!\,x!} p^x q^{n-x}$$

$$p(x) = \frac{5*4*3*2*1}{(3*2)(2*1)} * (0.51)^2 * (0.49)^3$$

$$p(x) = 0.306 = 0.31$$

Örnek: A0 kan gruplu bir baba ile A0 kan gruplu bir annenin 6 çocuğundan 2'sinin 0 kan gruplu olma ihtimali nedir ?

n=6, x=2, n-x=4, p=0.25, q=0.75

A0 (erkek) A0 (dişi)

A 0 A 0

AA 0A A0 00

A0, AA; 0.75

00 ; 0.25

$$p(x) = \frac{n!}{(n-x)!\,x!} p^x q^{n-x}$$

$$p(x) = \frac{6!}{4!.2!} (0.25)^2 (0.75)^4$$

$$p(x) = 0.295 = \%29.5 \cong 0.30 = \%30$$

2. Poisson Dağılımı ; X~p (X ; μ)

Poisson dağılımı az görülen (nadir) aralıklı değişkenlerin dağılımıdır. N sayısı çok büyük iken x değişkeninin gözlenme ortalamasının çok küçük olduğu durumlarda kullanılan bir dağılım biçimidir.

Bir başka deyişle poisson dağılımı, nadir gözlenen bir olayın, gerçekleşme sayısının frekans dağılımıdır. Bu dağılımdaki bir değişken iki bakış açısından ele alınarak çalışılabilir. Bunlardan biri zamana diğeri mekana (uzaysal) göre ele almadır.

Zamana bağlı bir örneklem; bir aylık bir zaman diliminde genetik bir sujda meydana gelen mutasyon sayısı ya da bir kasabada bir hafta süresince rapor edilen grip vakalarının sayısı gibi. Mekana bağlı örneklem ise; bir alanda örneklem quadratı (karesi) içinde bulunan yosun sayısı ya da tek bir konakçıda rastlanan parazit sayısı gibi. Burada poisson değişkeni X, her bir örneklemdeki olay sayısıdır ve 0 ve üzerindeki kesikli değerlerdir.

Poisson dağılımı gösteren bir değişkenin iki özelliği vardır:

1) Ortalamasının her bir örneklem birimindeki olması muhtemel maksimum sayıya kıyasla küçük (nadir) olmasıdır. Mesela 1cm^2'lik bir alanda bulunan yosunların poisson dağılımı göstermesi ya da 1 dakikalık zaman diliminde yeni grip vakalarının bildirilmesi olayında poisson dağılıma sahip olması beklenemez ancak zaman dilimi 1 haftaya uzarsa bu dağılım gözlenebilir.

2) Bir olayın gerçekleşmesi, aynı birimde bir önceki olaydan bağımsız olmalıdır. Yani olaylar birbirini etkilememelidir. Bu durumda nadir ve rasgele olaylara poisson dağılımı gösterir diyebiliriz.

B) SÜREKLİ OLASILIK DAĞILIMLARI

Normal Dağılım ; X~ N (μ,σ)

Herhangi bir örneklem grubunda bir ortalamanın güvenilirliği her bir ölçümün ya da gözlemin değişkenliğine ve ölçüm sayısına bağlıdır. Bu durumda değişkenliği ölçen bir ölçeğe ihtiyacımız vardır. Bu ölçek, her bir ölçümün, ortalama etrafında dağılım şekliyle ilgilidir.

Örnek : Mesela aşağıdaki veri takımlarını gözden geçirelim.

A		B	
1	2	1	2
25.2 max	30.1	27.4	23.0 min
24.9	29.9	30.3 max	30.3
25.1	29.8 min	22.7	26.4
25.0	30.0	19.8 min	36.8 max
24.8 min	30.2 max	24.8	33.5
(ΣX) = 125.0	150	125.0	150.0
($\overline{X}$) =25.0	30.0	25.0	30.0

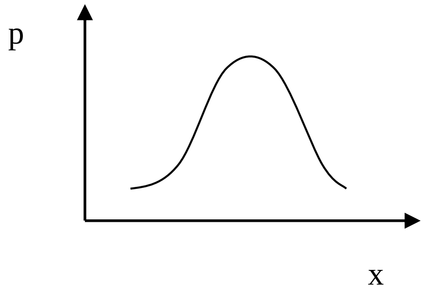
Ranjları

R=25.2-24.8	R=29.8-30.2	R=19.8-30.3	R=23.0-36.8
R=0.4	R=0.4	R=10.5	R=13.8

A ve B gruplarında 1. ve 2. uygulamalar karşılaştırıldığında ortalamaların aynı olduğu görülmekte ancak değerler, ortalama etrafında farklı şekilde dağılmaktadırlar.

Biyolojide veri takımlarının büyük çoğunluğu normal dağılım gösterme eğilimindedirler.

Örnek : Herhangi bir deneysel uygulamada bitkilerin yüksekliğine dair 500 ölçüm aldığımızı varsayalım. Ölçümlerimizi belli boy gruplarına ayırıp bir frekans dağılımı hazırlar ve histogramlarını çizerek ölçümlerinin nasıl dağıldığını görürüz. Bu histogramın kullanılış maksadı, tek bir ölçümün (rasgele) belli bir boy grubuna dahil olma ihtimalini bulmaktır. Histogram, orta noktası çan şeklini alan ve az çok simetrik bir şekil oluşturur. Ancak örnek sayısı çok daha fazla olduğunda (sürekli değişken olduğu için sonsuz kabul etmek gerekir) veriler o derece artar ki gruplar arasındaki sınırlar kalkar ve histogram çizgisel grafik haline dönüştürülür. Birçok tabii frekans dağılımının uyma eğilimi gösterdiği bu teorik eğriye "**normal eğri**" denir. Bu eğriye uyan dağılımlara da "**normal dağılım (Gaussian Dağılımı)** " adı verilir.



Örn: 35-44 yaşındaki erkeklerin vücut ağırlıkları ve diastolik kan basınçları ; bir ormanda belli bir alandaki ağaçların çaplarının dağılımı; bir gölden örneklenen bir balık türünün 2 yaş grubu bireylerinin uzunlukları normal dağılıma birer örnektir.

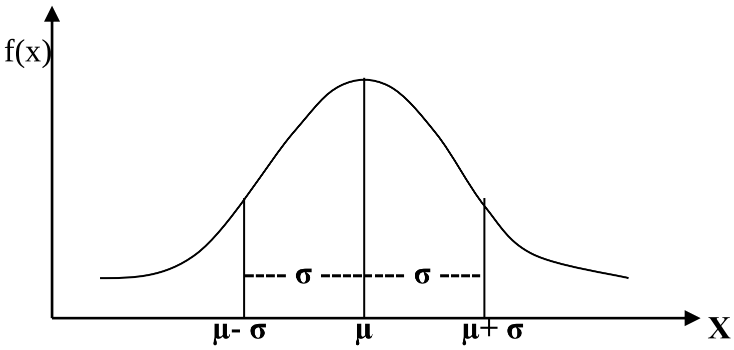
- Normal olmayan birçok dağılım tipi de, veriler farklı bir ölçeğe dönüştürülerek normal dağılım haline geçirilebilir.

*Örneğin 35-44 yaş grubu erkeklerin serum trigliserit konsantrasyonları pozitif eğilimli eğri oluşturabilir. Bununla birlikte ölçümlerin logaritmik dönüşümleri yapıldığında normal bir dağılım elde edilir.

Kullanışlı özelliklerinden dolayı normal dağılım istatistik işlemlerde son derece önemlidir. Hesaplama işlemlerinin ve hipotez testlerinin çoğunluğu, kullandığımız değişkenin normal dağılıma uyduğu varsayımına dayanır.

Şimdi normal dağılımın özelliklerine göz atalım. Normal dağılımın parametreleri μ (ortalama) ve σ^2 (varyans)'dır. Gösterimi [X~N (μ,σ)] şeklindedir. Bu ifadeyi grafik üzerinde gösterirsek ;

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} (x-\mu)^2 \right] \qquad -\infty < x < \infty , \qquad \sigma > 0$$

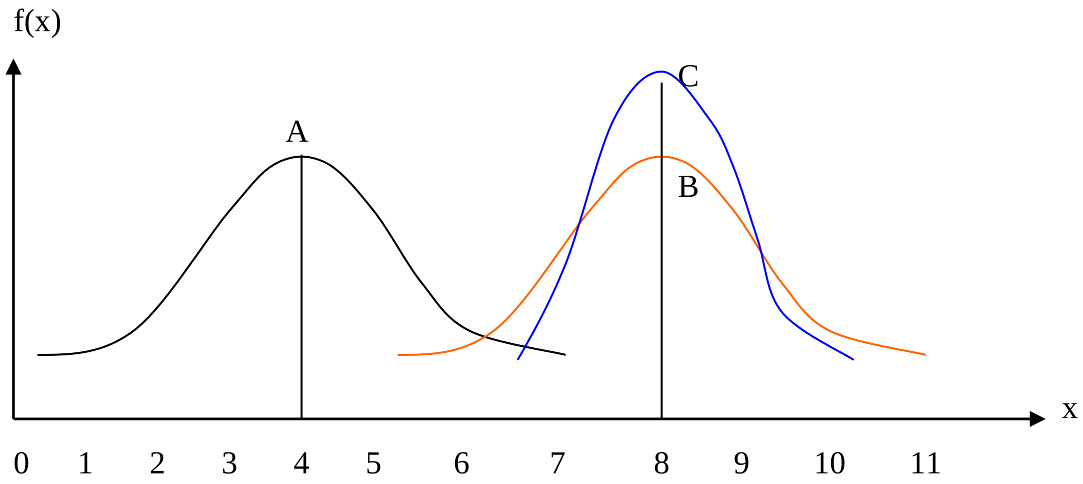


Şekil. $\boldsymbol{\mu}$ ortalama ve $\boldsymbol{\sigma^2}$ varyanslı bir normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu

Yoğunluk fonksiyonunun en yüksek frekansta gözlenen değeri $\boldsymbol{\mu}$'dür. Eğrinin altında kalan alan 1'e eşittir. Eğri $\boldsymbol{\mu}$ çevresinde simetriktir ve her iki tarafında (sağda ve solda) $\boldsymbol{\mu}$**-**$\boldsymbol{\sigma}$ ve

$\mu+\sigma$ noktasında bükülme yapar. Bükülme noktası, eğrinin eğiminin yön değiştirdiği noktadır. μ'den bükülme noktasına kadar olan mesafe σ parametresinin büyüklüğünün anlaşılmasına büyük katkı sağlar.

* Burada ilginç olan normal dağılımın tam şeklinin iki parametre μ ve σ^2 ile belirlenmesidir. Şimdi μ ve σ^2 değişiminin eğrinin şeklini nasıl etkilediğini görelim.



A⇒ $\mu=4$ $\sigma^2=1$ B⇒ $\mu=8$ $\sigma^2=1$ C⇒ $\mu=8$ $\sigma^2=0.5$

A ve B aynı varyans, farklı ortalama ; B ve C aynı ortalama, farklı varyans.

Normal Dağılımın Kullanım Alanları

Normal frekans dağılımı en yaygın olarak kullanılan dağılım tipidir. Uygulama alanları aşağıdaki gibi özetlenebilir.

1) Bazen bir örneklemin, herhangi bir test uygulamadan önce, normal dağılım gösterip göstermediğini bilmek isteriz. Bunun için örneklemin ortalama ve standart sapması kullanılarak beklenen frekanslar hesaplanır. Tabii bu normal eğrinin tablo değerleri kullanılarak yapılır.

2) Bazı durumlarda bir örneklemin normal dağılım gösterip göstermediğini bilmek, üzerinde çalışılan olayı etkileyen faktörün yapısı hakkında kurulan hipotezi destekleme ve reddetme imkanını sunar. Mesela bir değişkenin normal dağıldığını tespit ettiğimizde, değişkeni etkileyen faktörün eş varyanslı, bağımsız ve tamamlayıcı olması halinde hipotezi reddetmek için bir sebep yoktur. Diğer taraftan normal dağılım gözlenmiyorsa, değişkenin bir seçilim ya da baskı altında olduğunu düşünebiliriz.

3)Herhangi bir dağılımın normal olduğunu kabul edersek bazı varsayımlar üzerine kurduğumuz hipotezin testini yapar, tahminlerde bulunabiliriz.

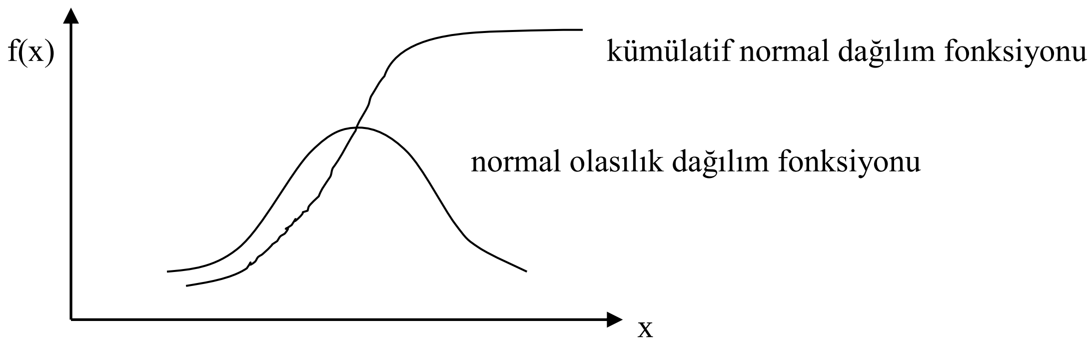
Normal Dağılımdan Sapma ve Grafik Metotlar

Bazı durumlarda gözlenen frekans dağılımları normaliteden sapar. Biz iki tür sapma tanımlayacağız. Bunlar:

1) Asimetri (Skewsness) : Asimetri, eğrinin bir yanının diğerinden daha uzun olmasıdır. Bu tip eğrilerde ortalama ve medyan çakışmaz. Eğriler sağa veya sola eğimli olarak isimlendirilirler.

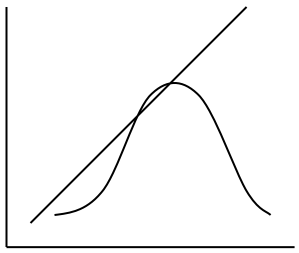
2) Basıklık (Kurtosis) : Bu eğrinin tepe noktasının çok belirgin olmayışı ya da basık olması şeklindedir. Leptokurtik bir eğride, ortalaması ve varyansı aynı olan normal bir eğriye göre, ortalama etrafında ve uçlarda daha fazla değer, orta kısımlarda ise daha az değer bulunur. Platykurtik bir eğride ise, aynı şartlarda, normal bir eğriye göre ortalama etrafında ve uçlarda daha az fakat ortalarda daha fazla değer bulunur. Bimodal bir dağılım ise uç düzeyde bir platykurtik dağılımdır.

Gözlenen bir dağılımın normaliteden sapmasını kontrol için bazı grafik metotlar geliştirilmiştir. Bu metotlar aynı zamanda hesaplama yapmadan dağılımın ortalama ve standart sapmasını bulmayı da sağlar. Bu grafik metotlar kümülatif frekans dağılımına dayanır. Normal dağılım gösteren simetrik bir eğrinin kümülatif tarzda hazırlanan grafiği S şekilli ya da sigmoid eğri olarak adlandırılır ve aşağıdaki şekilde grafike edilebilir.

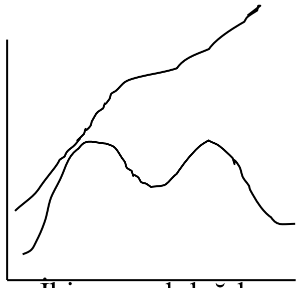


* Kümülatif eğrinin eğimi, frekans dağılımının yüksekliğindeki değişimi ifade eder. Kümülatif normal eğrinin ortadaki dik kısmı, normal eğride ortalama etrafındaki en büyük yükseklik değerine karşılık gelir.

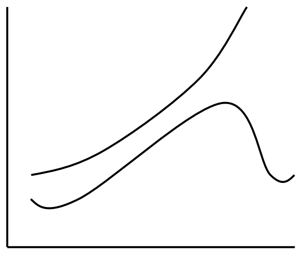
Normal dağılımda gözlenebilecek sapmaların grafiksel gösterimi aşağıdaki gibidir.



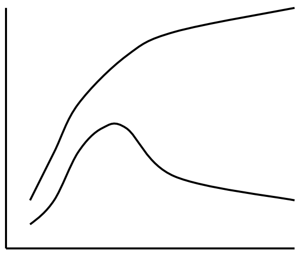
Normal



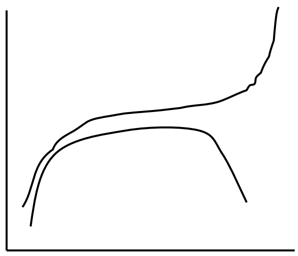
İki normal dağılımın eşit karışımı



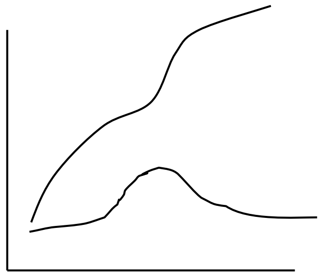
sola eğimli



Sağa eğimli



platykurtik



leptokurtik

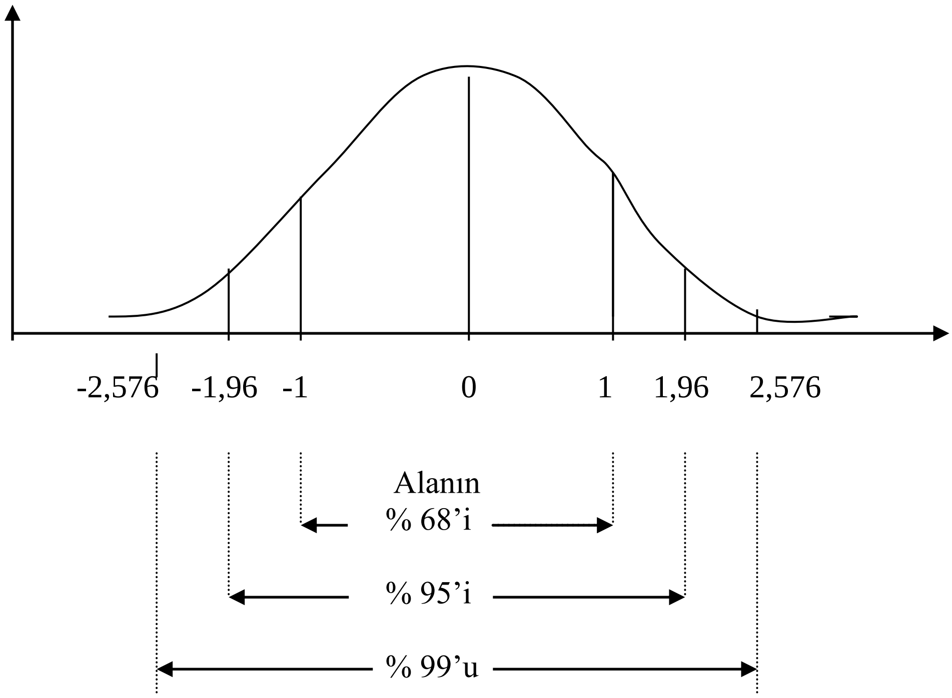
Standart Normal Dağılım

Tanım : Ortalaması (μ) 0 ve varyansı (σ^2) 1 olan normal bir dağılıma **standart** ya da **birim normal dağılım** adı verilir. N (0,1) şeklinde gösterilir.

*** σ^2, normal eğrinin yüksekliği (=$1/\sqrt{2\pi\sigma}$) ile ters orantılıdır.**

Standart Normal Dağılımın Özellikleri

Standart normal dağılım 0 etrafında simetriktir. Çünkü f(x) = f (-x)'tir.



Bu grafiği yorumlamak gerekirse;

$\mu \pm \sigma$, değerlerin %68'ini kapsar ve$\Rightarrow$ P (-1<X<+1) = 0.68 şeklinde ifade edilir.

$\mu \pm 2\sigma$, değerlerin %95'ni kapsar ve $\Rightarrow$ P (-1.96<X<+1.96) = 0.95 şeklinde ifade edilir.

$\mu \pm 3\sigma$, değerlerin %99'unu kapsar ve $\Rightarrow$ P (-2.576<X<2.576) = 0.99 şeklinde ifade edilir.

Tersinden yola çıkarak ifade edersek;

Değerlerin % 50'si, $\mu \pm 0.674\ \sigma$

Değerlerin % 95'i, $\mu \pm 1.960\ \sigma$

Değerlerin % 99'u, $\mu \pm 2.576\ \sigma$ arasına düşer.

Bütün bu katsayılar yani eğrinin altında kalan alanı belirleyen ifade daha önce yazdığımız $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[\frac{-1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right]$ denklemiyle hesaplanır.

Örnek : 9465 yeni doğan ağırlığında, ortalama = 109.9 ons ve Ss. =13.593 ons olsun. Bu doğum ağırlıklarından rasgele örnekleme yaparken, 151. ons ya da daha ağır bir örneği seçme şansı nedir ?

$\overline{X}$ = 109.9 ons, Ss.=13.595, X≥151.0 ons

151.0-109.9=41.102 41.1/13.593=3.02

İstenilen değer ortalamadan büyük olduğundan fark bulunur. Ancak normal eğri altında kalan alanda ons cinsinden karar veremeyeceğimiz için farkı st. sapma cinsinden hesaplanması gerekir. Bunun anlamı 151.ons'luk bir ağırlık 3.02 st. sapma birimince ortalamadan yüksektir. Doğum ağırlıklarının normal dağıldığını varsayarak eğri altındaki alana (Tablo II) bakarız ve 3.02'lik st. sapma değerine karşı 0.4987'lik bir değer buluruz. Bunun anlamı ortalama ve 3.02'lik st.sapma arasında % 49.87'lik bir alanın var olduğudur. Tam tersi ifadeyle, 0.0013 ya da % 0.13'lük bir alan ortalamanın dışında kalmaktadır. Bunun anlamı da 10.000 bireysel ağırlıktan sadece 13'ü 151.ons ağırlık ya da daha fazla ağırlığa sahip olacaktır.

Yukarıdaki örnek tek yönlü bir dağılımdan hesaplamıştır. Yani burada, tek bir bireyin ortalamadan 3.02'lik st. sapma birimince büyük olma ihtimalini bulduk. Bireyin ortalamadan büyük ya da küçük olduğuna dair bir varsayımımız olmadığında, sorulması gereken soru değişecektir. Soru şöyle sorulmalı, tek bir bireyin (birey ağırlığının) her iki yönde de ortalamadan sapma ihtimali nedir? Bu durumda olasılık, dağılımın her iki ucu da kullanılarak hesaplanmalıdır. Normal eğri simetrik olduğundan başlangıçtaki olasılık hesabı ikiye katlanır. Böylece 2*0.0013= 0.0026 olur. Tabii bu değer de, 151.02'lik bir sapma gösteren doğum ağırlığının bizim örneklem grubumuzun alındığı populasyonu temsil etmediği sonucuna varmamız için çok küçük bir değerdir.

Ortalamaların Dağılımı ve Varyansı

Populasyon ortalaması μ'yü hesap etmek için en doğal yol, örneklem ortalaması ;

$\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}$ 'dir.

X_1 ....n = 50 bireylik örneklerin ortalaması

X_2 ....n = 200 bireylik örneklerin ortalaması

X_3 ....n = 500 bireylik örneklerin ortalaması

Elimizde 1000 ölçümden oluşan bir populasyon olduğunu düşünelim. Bu populasyondan rasgele olmak üzere n = 50, n = 200 ve n = 500 büyüklüğünde örneklem grubu seçtiğimizi varsayalım. Elbette ki, bu örneklem gruplarının her birinin Xort değeri farklı olacaktır. Bu durumda anahtar nokta, örneklemimizin tek olduğunu unutmak ve bunun yerine populasyondan n büyüklüğünde bir çok sayıda örneklemin olabileceğini kabul etmektir. Bu kabulü yaptıktan sonra $\overline{X}$ 'yı populasyondan seçilen bütün muhtemel örneklemlerin rasgele değişkenleri olarak varsayalım.

Tanım: $\overline{X}$ 'nın örneklem dağılımı, hedef toplumdan seçilen n büyüklüğündeki bütün muhtemel örneklemlerin $\overline{X}$ değerlerinin dağılımıdır.

***** Normal dağılım gösteren bir populasyondan alınan örneklemlerin ortalaması n'e bağlı olmaksızın normal dağılım gösterir.

* Ancak asimetrik bir normal dağılımda, küçük n'e sahip örneklem ortalamalarının dağılımı, büyük n'e sahip örneklem ortalamalarından farklıdır ve normal dağılıma uymayabilir. Bu durum istatistikte büyük öneme sahip bir diğer teoreme işaret eder.

Merkezi Sınır Teoremi

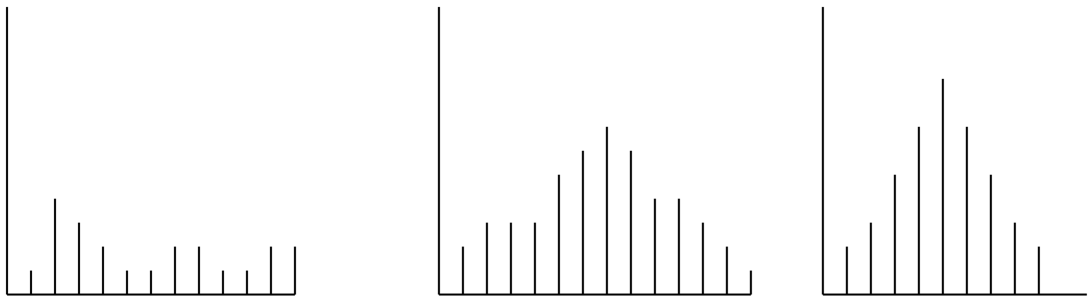
Tanım : Herhangi bir dağılıma sahip bir populasyondan alınan örneklemlerin ortalamaları, her bir örneklem grubundaki örnek sayısı (n) büyüdükçe normal dağılıma yaklaşır. Bu teoriye **merkezi sınır teoremi** denir.

Bu kabul çok önemlidir. Çünkü bu sayede aslında normal dağılım göstermeyen bir populasyonda ortalamaların istatistik yorumlarını, normal dağılım yaklaşımına göre yapabiliriz.

Bir başka deyişle, bir populasyondan yapılan örneklemlerde n ne kadar büyürse gerçek populasyon ortalamasına (μ) o kadar yaklaşılmış olur ve teoriye göre de eşit kabul edilir.

Bir diğer önemli nokta örneklem ortalamalarının ranjı orijinal verilerin ranjından düşüktür. Ortalamaların ranjındaki, bu düşüklük, dağılımın standart sapmasına yansır.

Örnek: Toplam 1000000 değer içeren bir veri takımı düşünelim. Bu veri takımından 3 farklı n değerine sahip 200 örneklem alalım ve bunların dağılımını inceleyelim.



(a)n=1, 200 örneklem (b) n=10, 200 örneklem (c) n=100, 200örneklem

Yukarıdaki şekiller aynı veri takımından alınmış 200 örneklemin dağılımını göstermektedir. Aralarındaki tek fark her bir örneklemdeki birey sayısıdır. Burada en dağınık frekans dağılımının a' da yani en küçük n'li örneklem dağılımında gözlendiğine dikkat ediniz. Bu aynı zamanda a'daki dağılımın en yüksek varyansa, dolayısıyla standart sapmaya sahip olduğunu göstermektedir.

* "Standart hata ise, aynı populasyondan alınmış n büyüklükte tekrarlı rasgele örneklemlerden elde edilen örneklem ortalamalarının değişkenliğinin nicel bir ölçüsüdür. Standart hatanın $1/\sqrt{n}$ ve tek bir σ gözleminin populasyonun standart sapması ile orantılı olduğunu hatırlayınız.

$$\sigma = \sqrt{\text{var}} \Rightarrow \text{sh}(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Bu durumda, bilinmeyen populasyon ortalaması μ'nün hesabının doğruluğunda örnek büyüklüğünün önemi ortadadır. 400 bireylik bir örneklemin 100 bireylik örnekleme terçih edilmesinin sebebi, 1. örneklemin standart hatasının 2.'nin yarısı kadar olmasıdır.

Merkezi Sinir Teoreminin Açıklanması ;

X_1, ...X_n , μ ortalama ve σ^2 varyanslı, bir populasyondan alınan örneklem olsun. Bu durumda büyük bir n değeri için, $\overline{X} \sim N(\mu,\sigma^2/n)$ (populasyondaki bireysel gözlemler normal dağılım göstermese bile) normal dağılım gösterecektir.

" Örneklem büyüklüğü ne kadar artarsa, standart hata o derece küçülür.

Güven Sınırları (Güven Aralığı)

Gerçek populasyon parametreleri (μ ve σ^2) her zaman bilinemez, ancak, güven sınırları belirlenerek, bir örneklem istatistiğinin güvenilirliği hesaplanabilir. n bireyli bir örneklemin ortalaması $\overline{X}$, ortalamanın standart hatası da $\sigma/\sqrt{n}$ ‘dir. Örneklem ortalamaları normal dağılım gösterdiğine göre, μ’nün 1.96 $\sigma/\sqrt{n}$ altında ve 1.96 $\sigma/\sqrt{n}$ üstündeki noktalar arasında kalan alan, n büyüklüğündeki örneklemin % 95’dir. Bunu açık şekilde yazarsak;

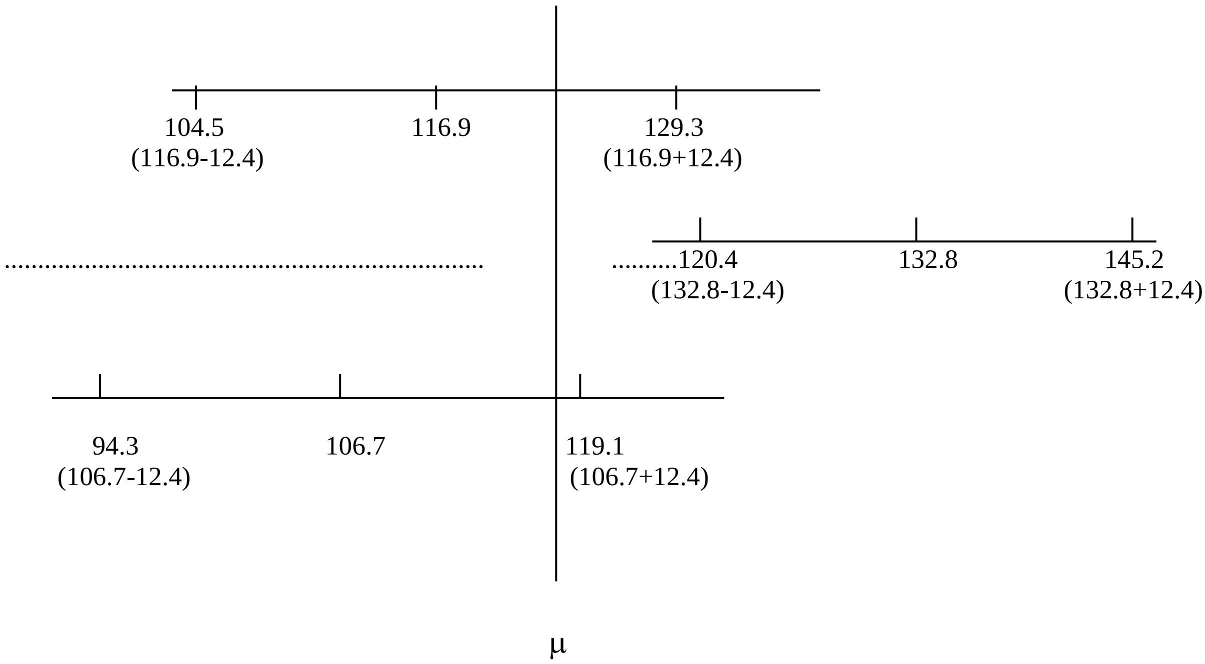
Bu örneklemi değerlerinin % 95’i **(** $\mu - 1.96\,\sigma/\sqrt{n}$ **,** $\mu + 1.96\,\sigma/\sqrt{n}$ **)** aralığı arasındadır.

Yine başka bir deyişle ; P **(** $\mu - 1.96\,\sigma/\sqrt{n} < \overline{X} < \mu + 1.96\,\sigma/\sqrt{n}$ **) = 0.95**’tir.

* μ değerinin belli bir aralık içerisinde olması ihtimalinin %95 olduğuna nasıl karar veririz ? Bunu anlamanın anahtar noktası şudur: Aralığın sınırları seçilen örneklem noktalarına bağlıdır (ya da daha doğrusu örneklem ortalamasına) ve örneklemden örnekleme değişir. Bundan başka, n büyüklüğündeki tekrarlı rasgele örneklemden elde edilecek bu tip aralıkların % 95’i μ parametresini kapsayacaktır.

* % 95 güven aralığı ifadesinin anlamı, örneklem ortalamasının, söz konusu dağılım içerisine düşme ihtimalidir. (Yani μ’nün dağılım içerisinde bulunma ihtimalinin % 95 olduğu aralığa %95 Cl .adı verilir.)

Şimdi bunu bir örnekle açıklayalım.



Örn : Örneklem ortalaması 97.2 ve standart sapması 0.2 olan bir dağılımın % 95 güven sınırlarını bulunuz. (n=10)

$$\bar{x} \pm 1.96 \sigma/\sqrt{n} = 97.2 \pm 1.96\left(\frac{0.2}{\sqrt{10}}\right) = 97.2 \pm 1.96(0.06) = 97.2 \pm 0.12 = (97.08, 97.32)$$

Örn : Aynı dağılımda, standart sapma 0.4 olduğunda % 95 güven sınırları ne olur ?

$$\bar{x} \pm 1.96 \sigma/\sqrt{n} = 97.2 \pm 1.96\left(\frac{0.4}{\sqrt{10}}\right) = 97.2 \pm 1.96(0.126) = 97.2 \pm 0.25 = (96.95, 97.45)$$

Students (t) Dağılım

Varyans bilindiği takdirde normal bir dağılımın ortalaması için güven aralığının nasıl oluşturulduğunu gördük. Ancak gerçekte populasyonun varyansı nadiren bilinir. Bu yüzden de bu suni bir yaklaşımdır.

<u>σ bilinen bir dağılımda</u> ; bireysel gözlemlerin μ ortalama ve σ^2 varyanslı bir normal dağılımdan geldiği farz edilmektedir. Bunun ifadesi $(\bar{x} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ ~N(0,1)'dır.

<u>σ bilinmeyen bir dağılımda</u> ; σ'yı örneklemin standart sapmasıyla hesaplamak gerekir. Bu durumda ifade $(\bar{x} - \mu)/(s/\sqrt{n})$ olur. Ancak burada bir problem belirir. Her bir örneklemden hesaplanan varyansın dağılımı artık normal dağılıma uymaz. Sapmaların dağılımı daha geniş ve düz olur. Bu geniş değişkenlik, daha büyük bir varyans oranı ise sonuçlanır. Bu oranın beklenen dağılımına "**t- dağılımı**" ya da "**student's dağılımı**" denir. (W. S. Gossett, 1908)

t-dağılımı, simetrik ve negatif sonsuzdan pozitif sonsuza uzanması bakımından normal dağılıma benzer. Ama n'e ve dolayısıyla (n-1)'e bağlantılı olarak eğrinin şekli değişebilir (n-1'in , kareler toplamından, varyansı hatasız hesap etmede bölen olduğunu hatırlayınız). Serbestlik derecesi (sd.) 1'den sonsuza kadar değişebilir. S.d =1 olan bir t-dağılımı normal dağılımdan en farklı olan t-dağılımıdır. n-1 büyüdükçe t-dağılımı normal dağılıma yaklaşır. S.d =∞ olan t-dağılımı ise, normal dağılımdır.

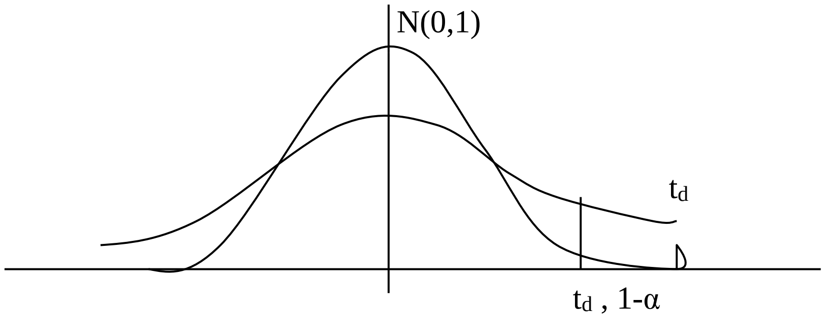
" Dağılımın şekli örnek büyüklüğüne (n) bağlıdır. Bu yüzden t-dağılımı tek bir dağılım değil, bir dağılımlar ailesidir."

"Eğer X_1, ...X_n ~N (μ,σ^2) ise ve bağımsız iseler, o zaman $(\bar{x} - \mu)/(s/\sqrt{n})$, n-1 serbestlik derecesi ile bir t-dağılımı olarak dağılım gösterir. "

"n-1 serbestlik dereceli bir t dağılımının U. yüzdesi $t_{n-1,u}$ ile gösterilir ki ;

P_r (t_{n-1}<t_{n+1})=U'dur.

yani $t_{20.095} \Rightarrow$ 20 serbestlik dereceli, bir t dağılımının 95. yüzdesi ya da üst 5. yüzdesi anlamındadır.



d serbestlik dereceli bir student-t dağılımının, N (0,1)dağılımı ile karşılaştırılması

IV. BÖLÜM
HİPOTEZ KURMA VE TEST ETME

Biyolojik araştırmalarda istatistiğin en sık kullanıldığı alan bilimsel hipotezlerin test edilmesidir. İstatistik metotların kullanılması önemlidir, çünkü, deneylerin sonuçları arasında kesin sınırlar yoktur. Bu yüzden alternatif hipotezler arasında karar vermek için istatistik testlere ihtiyaç vardır. İstatistik test, bir örneklem veri grubunu ele alır ve verilerin belli bir dağılıma uyduğu varsayımıyla, hipotezin kabul mü, red mi edileceği kararını verir.

İstatistik anlayış iki ana alana ayrılır :

Tahmin (Hesap) : Belli populasyon parametrelerinin tahmin edilmesidir.

Hipotez Test Etme : Populasyon parametre değerinin belli bir değere eşit olup olmadığını bulmaktır.

Testin yapısı veri tipine ve hipoteze göre değişebilir.

Soru : Bir grup insanın sistolik kan basınçlarının ölçüldüğünü varsayın. Bu ölçümlerin normal dağılım altında olduğunu tahmin ediyoruz. Eğer bu insanlar hakkında daha önceye ait mevcut bir veri yoksa, bu dağılımın parametreleri nasıl hesap edilir?

Soru : Belli bir bölgede yaşayan insanlardaki tüberküloz yaygınlığını ölçmek istiyoruz. Örneklenen n sayıda insanın bir p parametresi ile binominal dağılım gösterdiğini varsayıyoruz. P parametresi nasıl hesap edilir ?

Bu iki örnekte de bazı sayısal parametreleri elde etmek istiyoruz. Bu değerler nokta tahminleri olarak adlandırılır. Bazen de parametre değerlerinin içinde bulunduğu bir aralık belirlemek isteriz. Aralık dar ise tahminlerimizin iyi olduğunu kabul ederiz.

Örnek : Kolesterol seviyesi ve kardiyovasküler hastalıklar arasındaki ilişkiyi araştıran bir çalışmada, ailenin geçmişinin bir rolü olup olmadığı merak ediliyor.

Normal çocuklarda ortalama kolesterol seviyesi 175 mg/ml ‘dir. Kalp hastalığından ölen bir grup erkeğin çocukları üzerinde yapılan deneyde kolesterol ölçümleri alınıyor ve şu iki hipotez kuruluyor .

1) Bu çocukların kolesterol seviyeleri 175 mg/ml ‘dir.

2) Bu çocukların kolesterol seviyeleri 175 mg/ml ‘den fazladır.

Bu tipteki bir problemin çözümü iki hipotezle düzenlenebilir. İstatistiksel hipotez;

a) Sıfır (H_0) hipotezi (Farksız, eşit, benzer üzerine kurulu önerme)

b) Karşıt (H_1) hipotezi (Farklı, küçük, büyük üzerine kurulu önerme)

Yukarıdaki örnekte, 1. varsayım H_0 hipotezi, 2. varsayım H_1 hipotezidir. Test edilecek olan hipotez H_0 hipotezidir. H_1 ile gösterilen alternatif hipotez, H_0’ın karşıtını ifade eder.

Hipotezlerin denenmesi halinde ortaya çıkan sonuçlar karar aşamasında dikkatle yorumlanmalıdır. Ortaya çıkacak muhtemel kararlar tablodaki gibidir.

		H_0	H_1
KARAR	H_0'ın kabulü ;	H_0 doğrudur, H_0 kabul edilir.	H_1 doğrudur, H_0 kabul edilir.
	H_0'ın reddi ;	H_0 doğrudur, H_0 red edilir.	H_1 doğrudur, H_0 red edilir.

Eğer H_0 doğru ise, H_0 kabul edilir. H_1 doğru ise, H_0 red edilir. " Eğer H_0 doğru ise ve H_0 red edilmişse ya da H_1 doğru olduğunda, H_0 kabul edilmişse hata yapılmış demektir. "

Bu şekildeki hipotez kabul hatalarını ikiye ayırıyoruz:

1. tip hata (Type I error) : Doğru olan H_0 hipotezinin reddedilmesine 1. tip hata denir.

2. tip hata (Type II error) : Yanlış olan H_0 hipotezinin kabul edilmesi de ikinci tip hatadır.

Demek ki doğru kararlar şunlardır;

- ✓ Doğru H_0 hipotezini kabul etmek
- ✓ Yanlış H_0 hipotezini red etmek

Yanlış kararlar da;

- ✓ Doğru H_0 hipotezini red etmek
- ✓ Yanlış H_0 hipotezini kabul etmek

Şimdi terminoloji ile ilgili açıklamalar yapalım.

1. tip hata olasılık olarak kabul edilir ve α ile sembolize edilir. Yüzde olarak ifade edildiğinde ise "önem seviyesi" adını alır. Dolayısıyla, $\alpha = 0.05$'lik 1. tip hata, belli bir testte %5'lik önem seviyesine karşılık gelir. Bir frekans dağılımında, eğrinin altında kalan alanı, α oranında, düşey yönde kesersek, bu alana " testin red bölgesi" ya da "kritik bölgesi" denir. Diğer bölge ise H_0 hipotezinin kabul edildiği alanı gösterir ki buna da "kabul bölgesi" adı verilir.

Kolesterol ile ilgili örnekte,

1. tip hata: Aslında çocukların kolesterol seviyesi 175 mg/ml iken, kolesterolün bu değerden yüksek olduğuna karar verme ihtimalidir.

2. tip hata : Çocukların kolesterol seviyesi 175 mg/ml 'in üzerindeyken, kolesterol seviyelerin normal olduğuna karar vermektir.

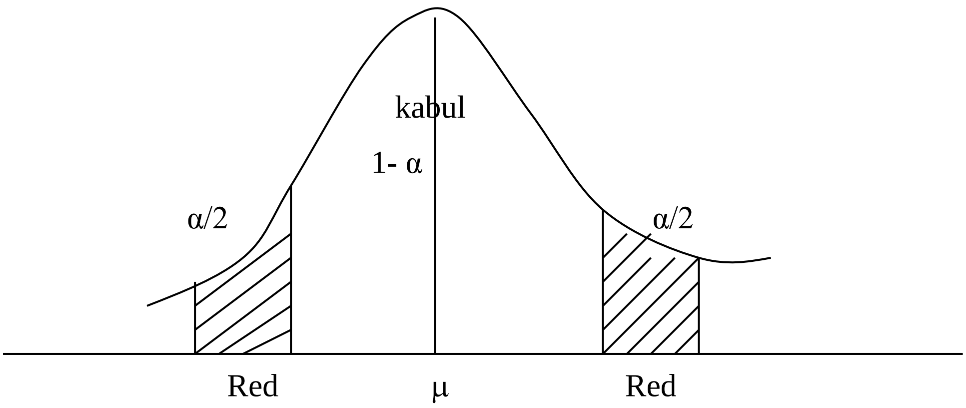
Test Etme

Tanım : H_0 hipotezinin karşıt hipotez H_1'e karşı α yanılma payına göre güvenle sınanmasını sağlayan yöntemlere **istatistiksel testler** (hipotez testleri) denilmektedir. Hipotez testleri H_1'in formülasyonuna bağlı olarak ikiye ayrılır.

1) İki yönlü test

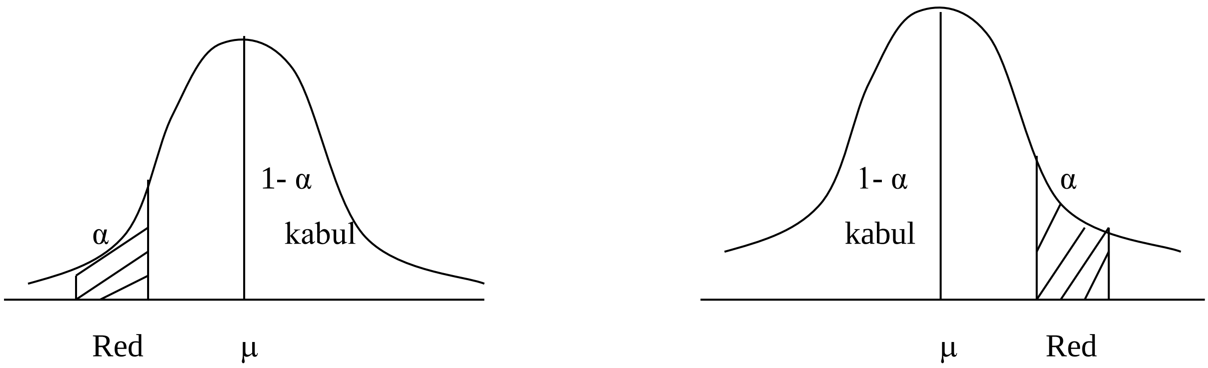
2) Tek yönlü test

1) Eğer $H_0: \mu_1 = \mu_2$ ya da $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ biçiminde kurulmuş bir hipotez, $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ biçiminde kurulmuş bir karşıt hipoteze karşı test ediliyorsa bu tür teste **iki yönlü test** denir.



İki yönlü testte red ve kabul bölgeleri

2) Eğer $H_0: \mu_1 = \mu_2$ ($H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$) biçimindeki bir hipotez, $H_1: \mu_1 < \mu_2$ veya $H_1: \mu_1 > \mu_2$ biçiminde bir karşıt hipoteze karşı test ediliyorsa buna **tek yönlü test** denir.



Tek yönlü testte red ve kabul bölgeleri

Tek yönlü ve iki yönlü testlerden elde edilen test istatistiklerinin (t, x^2, F) önemlilik düzeyleri farklı biçimlerde bulunur. Test istatistiğinin uyduğu teorik dağılımların kritik değerlerine göre H_0 red ya da kabul edilir.

V. BÖLÜM

PARAMETRİK TESTLER

Toplum parametresi ele alınarak kurulan bir hipotezin test edilmesi hipotezin yapısına bağlı olarak değişmektedir. Parametrik testler aşağıdaki gibi sınıflanır.

1. Tek örneklem testleri;
    - z testi
    - t testi

2. İki örneklem testleri;;
    - ❑ Bağımsız iki örneklem testleri
        - z testi
        - t testi
    - ❑ Bağımlı iki örneklem testi
        eşleştirilmiş t testi

3.k örneklem testleri
    - ❑ Bağımsız k örneklem testi
        - Tek yönlü varyans analizi (ANOVA)
    - ❑ Bağımlı k örneklem testi
        - İki yönlü varyans analizi

4. Doğrusal bağıntı ve ilişki analizi
    - ❑ Y (bağımlı), X (bağımsız) değişken;
        - Basit doğrusal regresyon
    - ❑ Y (bağımlı), X_1, X_2, ...X_k (bağımsız) değişken;
    - ❑ Çoklu regresyon ve korelasyon analizi
    - ❑ Doğrusal olmayan Bağıntı ve İlişki Analizi

PARAMETRİK TESTLER
z testi

Testin türü	Test modeli	Test edilen parametre	şartları
z testi (tek örneklem)	z=$\left(\overline{X}-\mu_0\right)/\left(\sigma/\sqrt{n}\right)$	Normal dağılım gösteren ve parametreleri bilinen X değişkeninin parametrelerine dayalı olarak kurulan H_o hipotezini, H_1 karşıt hipotezine karşı α yanılma payına göre, n hacimli örnek verileri aracılığıyla test etmeyi amaçlar. μ'nün μ_0 gibi bir değere eşit olduğu varsayılıyorsa hipotezler aşağıdaki gibidir. H_0: $\mu=\mu_0$ H_1: $\mu\neq\mu_0$ H_1 : $\mu>\mu_0$ H_1 : $\mu<\mu_0$	• Normal dağılıma tabi olmalı • (μ, σ) bilinmeli • n>30 olmalı • $\overline{X}$ ve s bilinmeli • X nicel değişken olmalı
z testi (iki örneklem)	$z=\dfrac{\left(\overline{X}_1-\overline{X}_2\right)}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n_1}+\dfrac{\sigma^2}{n_2}}}$	Birinci toplumda μ_1 parametresinin μ_0 gibi teorik bir değere ve ikinci toplumda μ_2 parametresinin μ_0 gibi teorik bir değere eşit olduğu varsayılıyorsa test edilen sıfır ve karşıt hipotezleri aşağıdaki gibidir: H_0: $\mu_1=\mu_2$ H_0: $\mu_1-\mu_2=0$ H_1: $\mu_1\neq\mu_2$ H_1 : $\mu_1>\mu_2$ H_1 : $\mu_1<\mu_2$ **Burada $\overline{X}_1$,n_1 birinci örnek, $\overline{X}_2$, n_2 ikinci örnek istatistikleridir. σ_1^2 ve σ_2^2 sırasıyla birinci ve ikinci toplum varyanslarıdır.**	• X nicel değişken olmalıdır.

z testi (devamı)

Testin türü	Test modeli	Test edilen parametre	şartları
z testi (tek örneklem)	$\lvert z\rvert = \dfrac{(P-P_0)}{\sqrt{\dfrac{P_0Q_0}{n}}}$	X nitel değişken olduğunda parametreler toplum oranı P ve varyansı PQ/n’ dir. Burada Q=1-P’ dir. Toplumda nitel değişkenlere ilişkin test edilen H_0 ve H_1 hipotezleri aşağıdaki gibidir: H_0 : $P=P_0$ H_1 : $P\neq P_0$ H_1 : $P>P_0$ H_1 : $P<P_0$	X nitel değişken olmalı

<u>Önem seviyelerinin belirlenmesi ve istatistik kararlar:</u>

z test istatistiğinin önemliliğinin belirlenmesi için $\lvert z\rvert$ değerleri z_α değerleri ile karşılaştırılır.

$\alpha = 0.05$; 0.01; 0.001 olmak üzere $z_{0.05}= 1.96$, $z_{0.01}=2.58$, $z_{0.001}=3.28$ olarak alınır.

- Eğer; $\lvert z\rvert < z_{0.05}$ ise $P>0.05$ H_0 kabul, önemli farklılık yoktur.
- Eğer; $z_{0.05}\leq \lvert z\rvert \leq z_{0.01}$ ise $P\leq 0.05^{*}$ H_0 red, önemli farklılık vardır.
- Eğer; $z_{0.01}\leq \lvert z\rvert < z_{0.001}$ ise $P\leq 0.01^{**}$ H_0 red, çok önemli farklılık vardır.
- Eğer; $\lvert z\rvert \geq z_{0.001}$ ise $P\leq 0.001^{***}$ H_0 red, ileri düzeyde önemli farklılık vardır.

Hipotez test edildikten sonra güven aralığı hesabı yapılır. %95 güven aralığı için alt ve üst sınır değerleri aşağıdaki gibidir:

$\mu_a = \overline{X} - 1.96 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (alt sınır) $\mu_ü = \overline{X} + 1.96 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (üst sınır)

PARAMETRİK TESTLER
t testi

Testin türü	Test modeli	Test edilen parametre	şartları
t testi (tek örneklem)	$t = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\dfrac{s}{\sqrt{n}}}$	N hacimli örneklem ortalamasının toplum ortalamasından farklı olup olmadığını kontrol eder. H_0: $\mu=\mu_0$ H_1: $\mu\neq\mu_0$ H_1 : $\mu>\mu_0$ H_1 : $\mu<\mu_0$	• X nicel değişken olmalı • μ_0 bilinmelidir • n<30 olabilir • σ bilinmeyebilir sd=n-1 olmalıdır.
t testi (tek örneklem)	$t = \dfrac{p - P_0}{\sqrt{\dfrac{pq}{n}}}$	Nitel verilerde tek örnek t testi H_0 : $P=P_0$ H_1 : $P\neq P_0$ H_1 : $P>P_0$ H_1 : $P<P_0$ Hipotezlerini test eder.	• X nitel değişken olmalı • X'in gözlenme oranı q=1-p'dir. • Sd=n-1'dir.
t testi (bağımsız iki örneklem)	$t = \dfrac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right)}{\sqrt{\dfrac{s^2}{n_1} + \dfrac{s^2}{n_2}}}$ (1) ya da $t = \dfrac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right)}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}}$ (2)	Bu test $\mu_1=\mu_2$ hipotezini karşıt hipotezlere karşı test eder. H_0: $\mu_1=\mu_2$ H_0: $\mu_1-\mu_2=0$ H_1: $\mu_1\neq\mu_2$ H_1 : $\mu_1>\mu_2$ H_1 : $\mu_1<\mu_2$	• Önce varyans türdeşliği testi yapılmalıdır • Ortak varyans kullanıldığında $sd=n_1+n_2-2$ olmalıdır.

(1)'de ortak varyans (s^2) varsayımı yapılır. 1. eşitlik daha yaygındır.
(2)'de farklı varyans yaklaşımına göre çözüme ulaşılır.

t testi

Testin türü	Test modeli	Test edilen parametre	şartları
t testi (bağımlı iki örneklem)	$t = \frac{X_F \sqrt{n}}{S_F}$	Bir grupta yer alan n birimden farklı zamanlarda, farklı işlemlerden elde edilmiş verilerin faklarının (F, difference) 0 ortalamalı toplumun rasgele örnekleri olup olmadığını kontrol etmeyi amaçlayan bir testtir. $H_0 : \mu_F = 0$ $H_1 : \mu_F \neq 0$ $H_1 : \mu_F > 0$ $H_1 : \mu_F < 0$ μ_F (μ Fark)	sd=n-1 olmalıdır.

Önem seviyelerinin belirlenmesi ve istatistik kararlar:

T test istatistiği sd=n-1 serbestlik dereceli (DF, df) t dağılımının kritik değerleri (t_α , sd) ile karşılaştırılarak önemlilik belirlenir ve olasılık düzeyine göre karar verilir.

- Eğer; $|t| < t_{0.05}$ ise $P>0.05^{ns}$ H_0 kabul, önemli farklılık yoktur.
- Eğer; $t_{0.05} \leq |t| \leq t_{0.01}$ ise $P \leq 0.05^{*}$ H_0 red, önemli farklılık vardır.
- Eğer; $t_{0.01} \leq |t| < t_{0.001}$ ise $P \leq 0.01^{**}$ H_0 red, çok önemli farklılık vardır.
- Eğer; $|t| \geq t_{0.001}$ ise $P \leq 0.001^{***}$ H_0 red, ileri düzeyde önemli farklılık vardır.

Hipotez test edildikten sonra güven aralığı hesabı yapılır. % 95 güven aralığı için alt ve üst sınır değerleri aşağıdaki gibidir:

$\mu_a = \overline{X} - 1.96 \frac{s}{\sqrt{n}}$ (alt sınır) $\mu_ü = \overline{X} + 1.96 \frac{s}{\sqrt{n}}$ (üst sınır)

ÖRNEKLER

z testi (tek örneklem)

örnek 1:

İlkokul mezunu öğrencilerin Türkçeyi kullanma başarı puanları X(60, 10) parametreli normal dağılım göstermektedir. İlkokul mezunu rasgele seçilen 35 öğrencinin Türkçeyi kullanma başarı puanları aşağıdaki gibi belirlenmiştir.

Başarı puanları

23	73	45	52	65	44	47	83	65	23	48	43
56	54	78	44	90	66	87	74	65	81	88	67
65	32	45	43	67	66	61	74	88	70	75	

soru: Öğrencilerin başarı puanları (60, 10) parametreli toplumdan alınmış rasgele örnek olabilir mi?

Çözüm: Önce hipotezler kurulmalıdır.

H_0: $\mu = \mu_0$

H_1: $\mu \neq \mu_0$

$\sigma=10$

Z testi, tek örneklem modeli bir istatistik programı kullanılarak uygulandığında sonuçlar aşağıdaki gibi olacaktır.

Değişken	N	ort	s. sapma	s. hata	z	P
Puan	35	61.34	18.05	1.69	0.79	0.43

Bu sonuçlara göre örneğin alındığı toplum parametresi μ=60' tan önemli düzeyde farklı değildir. Örnek toplumun rasgele örneğidir. (z=0.79, P=0.43) Örnek ortalaması toplum ortalamasından farksızdır.

Şimdi örnek grubumuzun alındığı toplumun parametresini tahmin etmek için güven aralığı (confidence interval, CI) hesaplayalım. Bunun için aşağıdaki model kullanılır.

$$P\left(\overline{X} - z_{\alpha}\right)\left(\sigma / \sqrt{n}\right) < \mu_0 < \left(\overline{X} + z_{\alpha}\right)\left(\sigma / \sqrt{n}\right) = 1 - \alpha$$

Güven aralığı; μ_a- $\mu_ü$ sınırları; $P(\overline{X} \mp z_\alpha)(\sigma / \sqrt{n}) = 1-\alpha$ biçiminde hesaplanır.

%95 güven aralığı için alt ve üst sınır değerleri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$\mu_a = \overline{X} - 1.96\sigma / \sqrt{n}$ ve $\mu_Ü = \overline{X} + 1.96\sigma / \sqrt{n}$

Değerler yerine konduğunda % 95 güven aralığı (58.03, 64.66) şeklinde bulunur.Örneğimizde %99 güven aralığı aşağıdaki gibi elde edilir.

μ_a =61.34-2.58. 10√35= 56.98

$\mu_ü$ =61.34+2.58. 10√35=65.70

Örnek 2:

100 X hastasının yaşları (yıl) veri takımını oluşturmaktadır. Bu örnekte n=100, yaş ortalaması 52.149 ve standart sapma 7.892 yaş/yıl olarak hesaplanmıştır. Toplumda X hastalarının yaş ortalaması 50 yaş/yıl ve standart sapması 9.0 yaş/yıl'dır.

Soru: Örnek, bu toplumun rasgele örneğimi dir?

Hipotezler aşağıdaki gibi kurulmalıdır.

H_0: $\mu = \mu_0$

H_1: $\mu \neq \mu_0$

σ=9.0

Test sonucu değerler;

Değişken	N	ort	s. sapma	s. hata	z	P	%95 güven ara.
Yaş	100	52.149	7.892	0.90	2.39	0.017	(50.384, 53.913)

Bu z testi sonucu 'z=2.40; P<0.05 olarak belirlenmiştir. Bu durumda 'n=100 birimlik örnek μ=50 ve σ=9.0 olan toplumun rasgele bir örneği değildir.' sonucuna varılır. (Ho reddedilir.

t testi (tek örneklem)

Örnek :

Toplumda Y hastalığında kanda A değişkeni normal dağılım göstermekte ve ortalaması 6.5 ünite olarak saptanmaktadır. Rasgele seçilen 20 kişilik Y hastalarında kanda A değerleri ölçülmüş ve aşağıdaki değerler bulunmuştur.

Soru: Örnek toplumun rasgele örneği midir?

A değerleri

4.7	4.8	3.9	6.0	4.0	5.5	6.5	8.0	7.8	4.3
5.1	3.4	9.2	5.2	6.9	8.0	3.2	4.0	6.5	5.0

Bu örnekte $n<30$ ve σ bilinmemektedir. Bu nedenle çözüm tek örnek t-testi ile yapılmalıdır. Hipotezler;

H_o: $\mu = \mu_0$

H_1: $\mu \neq \mu_0$ şeklinde kurulur.

Test sonuçları aşağıdaki gibi elde edilir.

Değişken	N	ort	s. sapma	s. hata	T	P
A ölçümü	20	5.600	1.706	0.382	-2.36	0.029

Bu sonuca göre örneğimizin test sonucu

H_o: $\mu=6.5$ H_1: $\mu \neq 6.5$

$t=-2.36$; $p<0.05$ Ho:Red

Bu sonuçtan 'örneğin, μ=6.5parametreli normal dağılımın bir rasgele örneği olmadığı, örneğin alındığı toplum ortalamasının 6.5'den önemli düzeyde düşük olduğu kararına varılır.

t testi (iki örneklem)

Örnek:

Normal (sağlıklı) ve X hastası bireylerde hemoglobin değerleri ölçülmüştür. Normal ve hasta bireylerde hemoglobin değerleri birbirinden farklı mıdır? Test ederek tartışınız. Rasgele seçilen 15 normal ve 15 hasta bireyin hemoglobin değerleri aşağıdaki gibidir.

Kişi no	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
normal	14.8	13.6	15.0	14.9	12.4	11.6	13.3	12.9	14.0	13.0	14.6	14.5	13.8	15.1	13.7
hasta	13.6	12.9	11.4	13.8	14.4	12.6	13.7	14.0	12.5	13.0	12.9	13.0	15.0	11.9	14.0

İki örneklem t testi uygulaması sonucu sonuçlar aşağıdaki gibi elde edilir.

H_o: $\mu_1 = \mu_2$

H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$

Değişken	N	ort	s. sapma	s. hata
Normal	15	13.81	1.04	0.27
Hasta	15	13.25	0.954	0.25

%95 güven sınırı (-0.18, 1.31) T=1.56 P=0.13 DF=28

Görüldüğü gibi test sonucu (t=1.56, sd=28, P>0.05) olarak tesbit edilmiştir.' X hastası ve normal bireylerin hemoglobin değerleri arasında önemli farklılık görülmemiştir' sonucuna varılabilir.

t testi (bağımlı iki örnek=eşleştirilmiş t testi) .

Örnek:

M isimli ilacın tansiyon düşürmede etkinliğini test etmek için hipertansiyonlu 10 hasta rasgele seçiliyor. Bu hastaların ilaç verilmeden önceki sistolik kan basınçları (SKB) ölçülüyor. Bu hastalara M ilacı veriliyor ve 2 saat sonra tekrar SKB değerleri ölçülüyor.

Soru: M ilacı tansiyon düşürücü özelliğe sahip midir? Test ederek tartışınız.

10 hastanın ilaç verilmeden önceki ve sonraki ölçülen SKB değerleri Tablo'daki gibidir.

hastalar	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M’den önce (ö)	134	156	145	170	173	160	140	155	143	150
M’den sonra (s)	130	145	140	160	170	160	140	150	130	130
Fark (ö-s)	-4	-11	-5	-10	-3	0	0	-5	-13	-20

Hipotezler:

H_0: $\mu_F = 0$

H_1: $\mu_F \neq 0$

Değişken	**N**	**ort**	**s. sapma**	**s. hata**	**T**	**P**
Fark	10	-7.10	6.33	2.00	-3.55	0.0063

Test sonuçlarına göre ’10 hastanın SKB düzeylerinde M ilacı almadan öncekine göre M ilacı aldıktan sonra önemli düzeyde düşme gözlenmiştir. Dolayısıyla farkın 0 olması beklenemez. H_0 reddedilir. M ilacı yüksek tansiyonlu bireylerde tansiyon düşürmede etkin bir ilaç olabilir’ sonucu çıkarılır. Bu sonuç (t= 3.55, SD=9; P<0.01). şeklinde verilir.

PARAMETRİK TESTLER - VARYANS ANALİZİ

Varyans analizi (ANOVA), k bağımsız ya da k bağımlı gruptan elde edilen verilerin grup ortalamalarının ya da işlem ortalamalarının farklılığını test etmek için yararlanılan bir yöntemdir.

TEK YÖNLÜ VARYANS ANALİZİ

Normal dağılım gösteren k toplumdan alınan k bağımsız grup ortalamalarının birbirine eşitliğini test etmek için tek yönlü varyans analizi uygulanır. Tek yönlü varyans analizi, iki ya da daha fazla grubun normal dağılan benzer ortalamalı populasyonlardan alınıp alınmadığını ortak varyans kullanarak test etmeyi amaçlar.

Tek yönlü ANOVA' da k toplumun μ_1 , μ_2 .... μ_k ortalamalı ve σ^2 varyanslı normal dağılım gösterdiği varsayımı yapılır.

Tek yönlü varyans analizi ile aşağıdaki hipotezler test edilir.
H_0 : Ortalamalar arasında fark yoktur. ($H_0 = \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$.=.........= μ_k)
H_1 : En azından bir ortalama diğerlerinden farklıdır.

Tek yönlü varyans analizinde genel varyans bileşenleri olan (değişim kaynağı, source of variation) gruplar arası ve gruplar içi varyans olarak ikiye ayrılır.

Tek yönlü varyans analizi yapılabilmesi için:

- toplam değişimi belirten **Genel Kareler Toplamı (GKT)** ,
- gruplar arası değişimi belirten **Gruplar Arası Kareler Toplamı (GAKT)**
- gruplar içi değişimi (Hata) belirten **Hata Kareler Toplamı (Gruplar İçi Kareler Toplamı) (GIKT, HKT)** hesaplanır.

Genel değişim = Gruplar arası değişim + gruplar içi değişim (hata) şeklinde bileşenlerine ayrılır.Ya da **HKT=GKT-GAKT** olarak yazılabilir.

Her bileşenin serbestlik dereceleri aşağıdaki gibi bulunur.

- Genel serbestlik derecesi, gsd =N-1
- Gruplar arası serbestlik derecesi, gasd =k-1
- Hata serbestlik derecesi, hsd = N-k olarak alınır.

Kare toplamları ve her bileşenin serbestlik dereceleri kullanılarak varyans tahminleri olan Kare Ortalamaları (KO) hesaplanır. Her değişimin kaynağı olan Gruplar arası kareler ortalaması (GAKO) ve hata kareler ortalaması (HKO) aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$S_G^2 = GAKO = GAKT / gasd \qquad S^2 = HKO = HKT / hsd$$

HKO aynı zamanda ortak varyans olarak toplumun varyansının tahminidir.

Gruplar arasındaki değişimin önemliliğini test etmek için F test istatistiği;

$$F = \frac{\left(\frac{GAKT}{gasd}\right)}{\left(\frac{HKT}{hsd}\right)} = \frac{GAKO}{HKO} = \frac{S_G^{\ 2}}{S^2}$$ şeklinde hesaplanır.

F test istatistiği, $V_1 = sd_1$ = gasd ve $V_2 = sd_2$ = hsd serbestlik dereceli F dağılımını gösterir. F istatistiğinin önemliliğini belirlemek için F (sd_1, sd_2) dağılımının kritik değerlerinden

($F\alpha$: sd_1, sd_2) faydalanılır.

Bu kritik değerlere göre H_0 hipotezinin kabul ve red bölgeleri Tablo 1' deki gibi özetlenir.

Tablo 1- Test istatistiği ile teorik F değerleri arasındaki ilişki

Koşul	Olasılık	Önemlilik	Karar
$F < F_{0.05};v_1, v_2$	$P>0.05$	önemsiz	H_0 kabul
$F_{0.05}; v_1,v_2 \leq F<F_{0.01};v_1,v_2$	$P<0.05$	önemli	H_0 red,H_1 kabul
$F_{0.01};v_1,v_2 \leq F<F_{0.001};v_1,v_2$	$P<0.01$	çok önemli	H_0 red,H_1 kabul
$F \geq F_{0.001} ;v_1,v_2$	$P<0.001$	ileri düzeyde önemli	H_0 red,H_1 kabul

v_1= gasd , v_2= hsd

Tek yönlü varyans analizi sonuçlandıktan sonra F'in olasılığı önemli olarak nitelendiriliyor ise, "grup ortalamalarından en az biri diğerlerinden farklıdır" karşıt hipotezinin kabul edilmesi gereklidir. Bu durumda hangi grup ortalamasının / ortalamalarının, diğerinden / diğerlerinden farklı olduklarının belirlenmesi gerekir. Bu amaçla yararlanılan ikinci aşama testlerine 'çoklu karşılaştırma testleri (multiple comparison)' ya da 'post-hoc testler' adı verilir.

Çoklu Karşılaştırma Testleri

K bağımsız grubun ortalamasının birbirinden farklılığını test etmek için geliştirilen testlere "çoklu karşılaştırma testleri" adı verilir. Varyans analizi sonucunda F test istatistiği önemli ise, hangi grup ortalamasının diğerlerinden farklı olduğu, farklılığın hangi gruptan kaynaklandığını ortaya koymak gerekir.

1. Dunn's test (Bonferroni t testi)
2. Fisher LSD testi (Fisher's Least Significant Difference test)
3. Studentized Range Test
4. Student- Newman- Keuls Test
5. Duncan Testi (Duncan's New Multiple Range Test)
6. Tukey HSD testi (Tukey's a testi, Tukey's Honestly Significant Difference test)
7. Tukey WSD testi (Tukey's b testi, Tukey's Wholly Significant Difference test)
8. Scheffé testi
9. Dunnett teti
10. MCB test (Hsu's MCB test, Hsu's Multiple Comparison of the Best test)

Çoklu karşılaştırma testlerinin çeşitliliği temelde ele aldıkları hata oranlarından kaynaklanmaktadır. Testlerin bazıları ikili karşılaştırmalarda, özel hata oranlarını ele alarak karşılaştırma yaparken, diğerleri eş zamanlı karşılaştırmalar yaparak bu karşılaştırmalarda ortak hatayı kullanmaktadırlar.

- Dunn's Testi (Bonferroni test): k ortalamanın ikili karşılaştırmalarını yapmaya yarayan ve ortak hata oranlarını (FW) kullanan bir testtir.

- LSD (Fisher's Least Significant Difference Test): Varyans analizinde F değeri önemli olduğunda uygulanan ve oldukça düşük güçte bir testtir. İkili çiftler arası karşılaştırmalar yaparak grup ortalama çiftlerinin özelliğini belirler.

- Standart Genişlik Testi: Denemede yer alan en küçük ve en büyük değeri ortalamalardan yararlanılarak geliştirilen bir istatistik aracılığı ile denemede yer alan ortalamaların birbirinden farklılığını değerlendirmeye yarayan bir testtir.

-SNK Testi: k grup ortalamalarını küçükten büyüğe değin dizdikten sonra karşılaştırma sıralarına göre farklı önemlilik kriterlerini kullanan bir testtir.

-Duncan Çoklu Genişlik Testi: Sıraya dizilmiş ortalamalar arasındaki farklılıkları ortalamaların sıralamadaki konumunu dikkate alarak değerlendirmeyi amaçlayan bir çoklu karşılaştırma testidir.

- Scheffé Testi: k grup ortalamasını ikili biçimde karşılaştırmak için geliştirilen bir testtir.

- Dunnett Testi: k denemeden birinin kontrol olarak alındığı ve diğer deneme sonuçlarının kontrole göre etkinliğinin analizi için başvurulan bir testtir.

- MCB Testi: Bir grup ortalamasının diğer ortalamalarla olan farklılığını değerlendirirken, kritik olarak farklardan en büyük farkın ya da en küçük farkın dikkate alınmasının uygun olacağına karar verildikten sonra ortalamalar arası farkın önemliliğini test eden bir yöntemdir.

Hangi çoklu karşılaştırma testini uygulamalıyız?

- Eğer gruplardan biri kontrol grubu olarak seçilmiş ve diğer grup ortalamalarının bu kontrole göre önemlilikleri test edilecek ise Dunnett Testinden yararlanmak gerekir.
- Eğer bir grubun ortalamasını diğer grup ailesinin ortalamasına göre ağırlıklı olarak test etmek gerekiyorsa, Scheffé testini tercih etmek uygundur.
- Eğer k grup ortalaması ortak bir hata yaklaşımı ile aynı anda değerlendirilmek isteniyorsa Tukey- WSD testi uygun testtir.
- Eğer k ortalamayı ikili olarak, ortak bir hata yaklaşımı ile karşılaştırmak gerekiyorsa Tukey HSD testi'ni tercih etmek gerekir.
- Eğer karşılaştırılacak grup sayısı 8 ve daha fazla ise, ikili karşılaştırmalar yapılmak isteniyorsa, Tukey-HSD testini kullanmak gerekir.

k bağımsız grup ortalamalarını birbiriyle karşılaştırmak için Tukey HSD testinin kullanılması uygun görülmektedir. k grup içinden biri kontrol grubu olarak alındığında ise ikili karşılaştırmalar için Dunnet testinin uygun olduğu kabul edilir. ANOVA sonucu test istatistiği önemli çıkarsa ($P<0.001$);

- Dunnet testi uygulanacaksa k denemelerden biri kontrol grubu olarak seçilir ve kontrol (C) ile j. örnek ortalaması arasındaki önemlilik değeri ;

$$D\alpha\left(Xc - Xj\right) = t_d \sqrt{\frac{2HKO}{n}}$$ biçiminde belirlenir. t_c= kritik değer

Burada t_d değeri k grup ve hsd'ye göre belirlenir. k grup ortalamasının Kontrol'den farklarının önemlilik değeri Dα olarak bulunur. Kontrol ile herhangi bir grup ortalamasının farkı bu sınırı aşarsa 'önemli farklılık vardır' denir.

Tukey HSD sonucunda ise önemlilik;

$$D_{\max} = Q_{0.05}\sqrt{\frac{HKO}{n}}$$ $Q_{0.05}$ = kritik değer.

ile kontrol edilir.

Varyans Analizi

Örnek: Aşağıdaki tabloda 4 ayrı grupta (normal grup, H hasta grubu, L hasta grubu, T hasta grubu) ölçülen serum total protein değerleri verilmiştir. Total protein değerinin hastalık türlerine ve normal bireylere göre farklılık gösterip göstermediğini test edelim.

Tablo. Dört grupta total protein değerleri

Birey no	Normal (TP)	H hastası (TP)	L hastası (TP)	T hastası (TP)
1	6.4	8.6	12.7	21.8
2	6.5	9.7	12.8	17.9
3	6.7	12.1	14.9	21.6
4	5.9	9.6	16.3	20.5
5	6.0	9.4	15.4	19.7
Toplam	T_1=31.5	T_2=49.4	T_3=71.1	T_4=101.5

Herhangi bir paket program yardımıyla tek yönlü varyans analizi uygulandığında aşağıda ki sonuçlar elde edilir.

Değişim kaynağı (DK)	serbestlik derecesi (sd)	kareler toplamı (KT)	kareler ort. (KO)	F test istatistiği (F)	Olasılık düzeyi (P)
Gruplar arası	gasd (sd_1)	GAKT	GAKO (S_G^2)	GAKO/HKO	?
Gruplar içi (hata)	hsd (sd_2)	HKT	HKO (s^2)	______	______
Genel	gsd	GKT	________	______	______

Bizim örneğimiz için tablodaki değerler;

(DK)	(sd)	(KT)	(KO)	(F)	(P)
Gruplar arası	3	548.14	182.71	105.25	0.000
Gruplar içi	16	27.78	1.74 -	------	-------
Genel	19	575.92	-------	--------	-------

Grup	N	ortalama	s sapma
1	5	6.300	0.339
2	5	9.880	1.314
3	5	14.420	1.605
4	5	20.300	1.589

4 farklı grupta total protein değerleri önemli düzeyde farklılık göstermektedir ($F(3,16)=105.25$, $P<0.001$). Hangi grup ya da grupların birbirinden farklı olduğunu bulmak için çoklu karşılaştırma testi yapmak gerekir.

Bu tip bir örnekte normal grubu kontrol grubu olarak kabul edip diğer grupların bu gruba göre önemlilik düzeylerini analiz etmek gerekir. Bunun için Dunnett testi uygulanır. Dunnett testi sonuçları bu örnek için aşağıdaki gibi elde edilir.

Kritik değer= 2.59

Kontrol grubu=1

Düzey	Alt sınır	Merkez	Üst sınır
1	1.422	3.580	5.738
2	5.962	8.120	10.278
3	11.842	14.000	16.158

Bu sonuçlara göre Dunnett testi için kritik değerin Q=2.59 olduğu, normal grup ile hasta grubu 2 arasında ortalama farkın güven sınırı (1.422-5.738), 3. grup ile arasındaki farkın güven sınırı (5.962-10.278) ve 4. grup ile arasındaki farkın güven sınırı (11.842-16.158) olarak belirlenir. Hiçbir güven sınırı diğeri ile çakışmamaktadır. Bu nedenle ‘H, L, T gruplarının ortalamalraı normal gruptan önemli düzeyde farklıdır ve yüksek düzeyde Total Protein değerlerine sahiptir’ sonucuna ulaşılır.

REGRESYON ve KORELASYON ANALİZİ

Basit Doğrusal Regresyon Analizi

Basit doğrusal regresyonun amacı, Y ile X arasındaki bağıntıyı Y=a+bX biçiminde ifade eden modeli bulmak ve bu modelde yer alan a ve b katsayılarının önemliliğini test etmektir.

Basit doğrusal regresyon analizi, Y=a+bX regresyon modelinin; Y'nin değerlerinin gözlem aralığı içinde (arakestirim, interpolasyon) tahmininde yada gözlem aralığından bir ya da birkaç peryot önceki ve sonraki değerlerini (dışsal kestirim, öteleme, ekstrapolasyon) tahmin etmede kullanılıp kullanılamayacağını belirler.

Basit doğrusal regresyonda; toplumda iki değişken arasında Y= α + βX biçiminde bir bağıntı olduğu varsayılır. Bu bağıntı n birimlik örnek verileri aracılığıyla Y=a+bX biçiminde tahmin edilir. Bu eşitliğe basit doğrusal regresyon modeli denir. Bu modelde a ve b katsayıları; α ve β parametrelerinin tahminidir. a katsayısı sabit (intercept, constant), b katsayısı ise regresyon doğrusunun eğimidir (slope). b, X'de meydana gelen, bir birimlik değişimin Y'de kaç birimlik bir değişime neden olacağını belirtir.

Basit doğrusal regresyon modelinde a ve b katsayılarının tahmini EKY (en küçük kareler yöntemi) ile belirlenir.

$$a = \frac{\sum X^2 \sum Y - \sum X \sum XY}{\sum X^2 - \left(\sum X\right)^2 / n} \qquad b = \frac{\sum\sum XY - \left(\sum X \sum Y\right)/n}{\sum X^2 - \left(\sum X\right)^2 / n}$$

Eğer b hesaplanmış ise a katsayısı X ve Y'nin ortalamasından yararlanarak $a = \overline{Y} - b\overline{X}$ biçiminde hesaplanır. Belirlenen a ve b katsayıları modelde yerine konarak verilere uyan doğru denklemi Y=a+bX belirlenir.

EKY'de a ve b katsayılarını hesaplamak için aşağıdaki gösterimlerle verilen terimlerden yararlanılır.

n: birim sayısı

Tx: X değerleri toplamı — S_x^2: X'in varyansı

Ty: Y değerleri toplamı — S_y^2: Y'nin varyansı

CTxy: XY çarpımlar toplamı

KTx: X kareler toplamı — KTy: Y kareler toplamı

Bu değerlerin hesaplanmasına ilişkin formüller aşağıdaki gibidir.

$$CTxy = \sum XY - \frac{\sum X \sum Y}{n} \qquad b = CTxy / KTx$$

$$KTx = \sum X^2 - \frac{\left(\sum X\right)^2}{n} \qquad S_x^2 = KTx / (n-1)$$

$$KTy = \sum Y^2 - \frac{\left(\sum Y\right)^2}{n} \qquad S_y^2 = KTy / (n-1)$$

$$\overline{Y} = Ty / n \qquad \overline{X} = Tx / n$$

Bir gözlemin tahmin hatası $e = Y - (a + bX)$ biçiminde belirlenir. Eğer model tam olarak verilere uygun ise, bu farkların tüm birimler için kareleri toplamının sıfır olması beklenir. Fakat bu durum mümkün değildir. Öyleyse farkların kareleri toplamının minimum olması gerekir.

$$\sum e_i^2 = \sum [Y - (a + bX)]^2 \Rightarrow 0$$

Regresyonun tutarlılığı tahminin varyansının minimum olması ile mümkündür.

Tahminin varyansı (s^2), aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$S^2 = \frac{1}{(n-2)} \left[KTy - \frac{(CTxy)^2}{KTx} \right] = \frac{(n-1)}{(n-2)} \left[S_y^2 - \frac{S_{xy}^2}{S_x^2} \right]$$

Tahminin standart sapması ise $S = \sqrt{s^2}$ biçiminde hesaplanır. Verilere uyan doğrunun gerçekten tutarlı olup olmadığı regresyon analizi ile belirlenir. a ve b katsayıları, tahminin hatasını en küçük düzeyde tutacak şekilde belirlenmelidir.

Yukarıda hesaplanan değerler aracılığı ile b'nin varyansı ;

$$S_b^2 = \left[\frac{1}{n-2} \left(KTy - \frac{(CTxy)^2}{KTx} \right) \right] / KTy$$

ya da

$S_b^2 = S^2 / KTx$ biçiminde hesaplanır.

b'nin önemliliği için (H_0 : β=0, H_1 : β≠0) hipotezleri;

$t = \frac{b-0}{\sqrt{S_b^2}}$ sd=n-2 modeli ile test edilir.

b'nin önemliliği regresyon doğrusu eğiminin sıfırdan farklılığının testidir. b'nin sıfır olması Y=a+bX doğrusunun X eksenine paralel olmasıdır. b=0 X'in Y üzerinde bir etkisinin olmadığını belirtir. b önemli ise 'X'in Y üzerindeki belirleyiciliği önemlidir.' yorumu yapılır.

a'nın varyansı aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$S_a^2 = \left[\frac{Tx}{nKTx}\right] S^2 = \left[\frac{\sum X_i}{nKTx}\right] S^2$$

Sabitin (a) önemliliği için H_0: α=0, H_1 :α≠0) hipotezleri;

$t = \frac{a-0}{\sqrt{S_a^2}}$ sd=n-2 modeli ile test edilir.

a'nın önemliliği regresyon doğrusunun merkezden geçip geçmediğinin test edilmesidir. a önemli ise X ve Y arasındaki regresyon denkleminde sabitin mutlaka yer alması gerektiği belirtilir. Model mutlaka Y=a+bX biçiminde tahmin edilmelidir. a önemli değil ise regresyon modeline sabit değeri katmadan, Y=bX biçiminde tahmin edilmesinin sakıncalı olmayacağı anlamı çıkarılır.

Regresyon analizi, Y'nin varyansının bileşenlerine ayrılması ve bu varyans bileşenlerinin birbirlerine oranının önemliliğini belirleme işlemidir.

Regresyon analizi, Y'nin varyansı;

Var (Y)=Regresyon Kareler Toplamı+Hata KarelerToplamı biçiminde iki bileşene ayrılır.

Burada Y, regresyon tahmin değeri olan Y=a+bX değeridir. Regresyon analizinde yararlanılan Kareler Toplamları aşağıdaki gibi hesaplanır.

GKT=KTy

RKT=b^2 KTx = $(CTxy)^2$ /KTx

AKT=GKT-RKT

RSD=1; GSD=N-2; ASD=n-2

GKO=GKT/GSD

RKO=RKT/1

AKO(Artık)= AKT/ASD

F(1,ASD)=RKO/AKO

GKT: Genel kareler toplamı

RKT: Regresyon kareler toplamı

AKT: Artık (residual) kareler toplamı

GSD: Genel serbestlik derecesi

RSD: Regresyon serbestlik derecesi

GKO: Genel kareler ortalaması

RKO:Regresyon kareler ortalaması

AKO: Artık kareler ortalaması

F(1,asd): Regresyonun önemliliği için F test istatistiği

F(1,asd) test istatistiği teorik 1, asd serbestlik dereceli F dağılımının kritik değerlerine göre (F(a,1,asd)) değerleridir.

İki değişken arasındaki ilişkinin düzeyi Pearson korelasyon katsayısı r ile hesaplanır.

$$r = \frac{CTxy}{\sqrt{(KTx)(KTy)}}$$ şeklinde hesaplanır.

Regresyon analizi sonuçlarından yararlanarak da korelasyon katsayısı $r = \sqrt{r^2}$ biçiminde hesaplanır.

Burada $r^{2,}$ r^2 =RKT/KTy şeklinde hesap edilebilir.

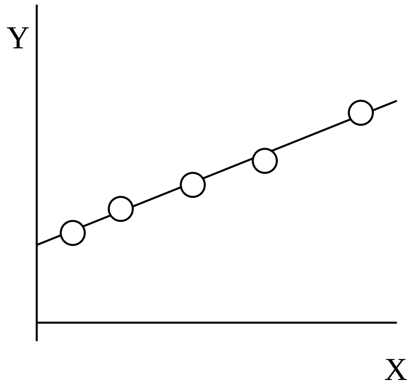
Korelasyon katsayısının önemliliği t testi ile test edilir.
$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$ sd=n-2

t test istatistiğinin önemliliği sd=n-2 serbestlik dereceli t dağılımının kritik değerlerine göre (t_{α}, sd) belirlenir. a=0.05; 0.01 ve 0.001 için değerlendirme sonucu; P>0.05 ise iki değişken arasında önemli ilişki olmadığı; p<0.05 ise değişkenler arasında önemli düzeyde ilişki olduğu biçiminde değerlendirilir.

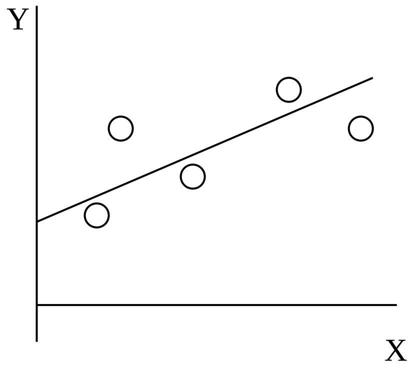
Basit doğrusal regresyon ve korelasyon analizi uygulamak için öncelikle X ve Y'nin ilişki grafğinin çizilmesi gerekir. Bu grafikte noktaları içine alan elipsin ana ekseni, tali ekseninden büyük ise ve ana eksen X eksenine paralel değilse ' iki değişken arasında basit doğrusal bir bağıntı ve ilişki olabilir'tahmini yapılır. Yaygın olarak kullanılan istatistik programlarından birine (Minitab, SPSS, Statistica) başvurularak regresyon menüsü seçilir.

Doğrusal Regresyon Denkleminin Varyansı ile İlgili Gösterimler

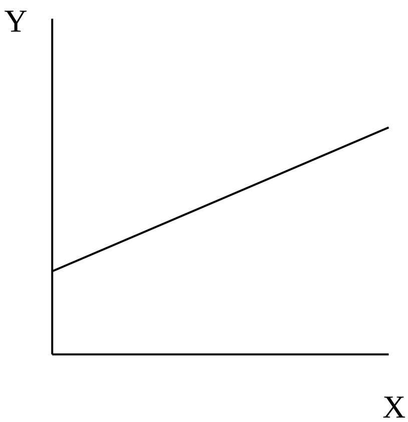
Y=a+bX
$\sigma^2 = 0$



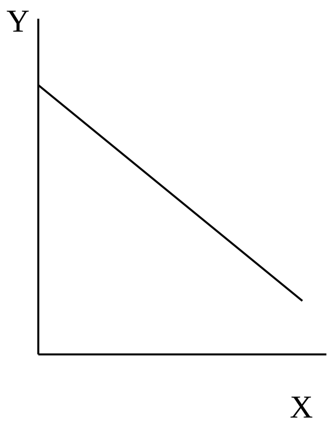
Y=a+bX
$\sigma^2 > 0$



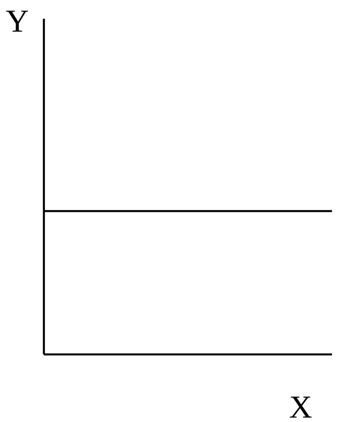
β ya da b katsayısı (eğim)'nın farklı değerler olması halinde lineer regresyon doğrusunun eğimi



B>0
pozitif ilişki



B<0
negatif ilişki



B=0
ilişki yok

Regresyon Analizi

Örnek: 9 bireyin günlük içtikleri sigara sayısı (GİSS) ve sistolik kan basınçları (SKB) cm/Hg olarak aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Birey no	1	2	3	4	5	6	7	8	9	T
SKB(Y)	12	14	11	15	11	14	15	13	10	115
GİSS(X)	4	11	8	15	5	16	20	9	2	90

Soru: GİSS ile SKB arasındaki bağıntının denklemini bulunuz. İki değişken arasındaki ilişki düzeyini bulunuz ve ilişkinin önemliliğini test ediniz. Bilgisayarda uygun bir istatistik programı ile aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Regresyon denklemi; SKB=10.0+0.277GİSS şeklinde elde edilir.

	Katsayı	St sapma	T	P
Sabit	10.0038	0.5741	17.43	0.000
GİSS	0.27740	0.04988	5.56	0.000

S= 0.8524 R-sq=81.5%

Değişim kaynağı	DF	SS	MS	F	P
Regresyon	1	22.469	22.469	30.92	0.000
Hata	7	5.086	0.727	--------	------
Toplam	8	27.556	---------	--------	-------

SKB ve GİSS arasındaki doğrusal bağıntının denklemi SKB=10+0.277GİSS biçiminde belirlenmiştir. Bu regresyon bağıntısı, SKB'nin değişimi üzerinde GİSS'in etkisi önemlidir (F (1,7)=30.92, P<0.001) SKB'nin değişimi üzerinde GİSS'in önemli düzeyde etkisi vardır.

GİSS bir birim artarken SKB , 10+0.277 birim artış gösterir. Bu önemli bir artışı ifade eder (t=5.56, sd=7, P<0.001) ve SKB'nin değişiminin % 85'ini GİSS açıklamaktadır (R-sq, r^2=%81.5). Korelasyon katsayısı R'nin karesine belirtme katsayısı denir ve modeldeki bağımsız değişkenin Y'nin değşimini % kaç açıkladığını belirtir.İki değişken arasındaki ilişkiy belirten ilişki katsayısı $r=(0.815)^{1/2}$ =0.903 bulunur. r'nin önemliliğini belirlemek için t testi yapılır. Bu örnekte t=5.556, sd=7 ve $P<0.001$ olarak bulunur. Bu sonuç regresyon analizinde b'nin önemliliği (GİSS'in katsayısı) ile aynıdır. Dolayısıyla r'nin önemliliği için b' nin önemliliğinden yararlanılır.